数学分析问题研究与评注

汪 林 戴正德 编著
杨富春 郑喜印

科学出版社

数学分析问题研究与评注

汪　林　戴正德
杨富春　郑喜印　编著

科　学　出　版　社
1995

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书总结了 1930 年以来国内外学者在数学分析方面的研究成果，主要包括与极限、连续、微分、积分、级数、多元函数有关的重要问题. 每个问题均按基本部分和提高部分两个层次进行阐述，基本部分与现行教材紧密结合，反映了作者们的丰富教学经验，写得通俗易懂；提高部分涉及更为深入、难度较大的问题. 每章均分为导读、正文、说明三个部分，层次分明，利于读者选读，并了解有关参考文献.

本书读者对象为高等院校理工科学生、教师及有关的科技工作者.

数学分析问题研究与评注

汪 林 戴正德
杨富春 郑喜印 编著

责任编辑 吕 虹

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1995 年 11 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1995 年 11 月第一次印刷 印张：10 1/4
印数：1—1 500 字数：265 000

ISBN 7-03-004755-9/O · 808

定价：22.00 元

前　言

数学分析是近代数学的基础，是每个理工科大学生的必修课，也是现代科学技术中应用最为广泛的一门学科. 国内外许多数学工作者致力于这门重要学科的教学和研究工作，并发表了大量关于数学分析的教学和研究成果的论文. 为了便于理工科院校的师生及有关数学工作者了解数学分析的发展状况，我们对数学分析方面近期的教学和研究论文进行了挑选、归纳和总结而撰写了本书.

本书的材料主要是从国内外数学工作者的教学和研究工作中直接挑选出来的，也有一部分是我们自己在长期的教学和研究实践中积累的心得体会或研究成果.

本书所选的问题研究分两个层次，即基本部分与提高部分. 基本部分的特点是：短小精悍，通俗易懂，反映了原作者对数学分析的精深研究和丰富的教学经验的总结. 这部分内容最适用于教学，使学生得以加深对概念和理论的理解，还能启发学生如何深入思考问题. 提高部分的特点是：比较深刻，实际上是一些重要的科研成果. 这部分内容不仅对有关师生有参考价值，而且对于进行相应专题研究的人也是很有帮助的.

阅读本书所需的数学分析预备知识，假定读者已经掌握. 因此，本书在论述问题时，只作了很少的说明. 此外，由于本书是教学和研究成果的总结，因而不可能像通常的数学分析教材那样，比较系统而又由浅入深地介绍所有内容. 好在本书各章自成体系，读者可根据需要和兴趣阅读.

本书得到云南大学“211 工程”教材建设项目基金和云南省科委应用基础研究基金资助. 北京理工大学的叶其孝教授仔细地审阅了书稿，并提出了许多具体而又十分宝贵的意见，使本书增色不

少. 对此，作者表示深深的谢意.

由于作者水平有限，因而本书难免有不少缺点，殷切期望读者予以批评指教.

作　者

1994 年 7 月于云南大学

目　录

第一章　极限与连续 …… 1
§1.1　导读 …… 1
§1.2　函数概念 …… 1
1.2.1　函数概念的历史演进 …… 1
1.2.2　关于周期函数的定义 …… 6
§1.3　极限的几个问题 …… 8
1.3.1　Cauchy 数列的几种弱形式间的关系 …… 8
1.3.2　算术-几何平均值不等式的几种新证法 …… 9
1.3.3　极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ 与 Euler 常数 …… 13
1.3.4　用等价无穷小替换求极限法的一个推广 …… 19
1.3.5　关于数列极限的一个定理 …… 22
1.3.6　复合函数的极限 …… 25
1.3.7　评注 …… 27
§1.4　连续函数 …… 28
1.4.1　一对一的连续函数 …… 28
1.4.2　连续函数的逐次逼近序列 …… 28
1.4.3　收敛保持函数 …… 29
1.4.4　在无理点连续而在有理点间断的严格单增函数 …… 31
1.4.5　无处单调的连续函数 …… 32
1.4.6　关于单调函数之商 …… 33
1.4.7　评注 …… 35
§1.5　闭区间上连续函数的性质 …… 36
1.5.1　闭区间上连续函数最大值存在性定理的几种证法 …… 36
1.5.2　几个基本定理证明的统一处理方法 …… 38
1.5.3　Weierstrass 逼近定理的一个初等证明 …… 40
1.5.4　评注 …… 42
§1.6　一致连续函数 …… 43
1.6.1　函数一致连续的等价命题 …… 43

1.6.2 函数乘积的一致连续性 …… 47
1.6.3 使函数连续且一致连续的点集的性质 …… 49
1.6.4 评注 …… 50
§1.7 在每个区间上有一个真正局部极大值的函数 …… 51
第二章 微分 …… 56
§2.1 导读 …… 56
§2.2 微分学基本定理 …… 57
2.2.1 微分学基本定理的初等证明 …… 57
2.2.2 微分学基本定理的推广 …… 58
§2.3 对称导数 …… 60
2.3.1 导数与非中心差商 …… 60
2.3.2 对称导数的基本理论 …… 62
2.3.3 评注 …… 64
§2.4 导数与单调性 …… 64
2.4.1 可微且单调有界函数中的一个反例 …… 64
2.4.2 关于连续函数严格单调的充分条件 …… 65
2.4.3 导数几乎处处为零的严格单调的连续函数 …… 66
§2.5 连续性、可微性与一致可微性 …… 67
2.5.1 导函数的连续性 …… 68
2.5.2 函数一致可微的特征 …… 68
2.5.3 处处连续而无处可微的函数 …… 71
2.5.4 稠密集上函数不连续的一个定理 …… 73
2.5.5 评注 …… 75
§2.6 导数介值定理的几种证明 …… 76
§2.7 微分中值定理及其推广 …… 80
2.7.1 关于 Rolle 定理的证明 …… 80
2.7.2 Lagrange 定理及其证明方法 …… 82
2.7.3 微分中值定理的推广 …… 88
2.7.4 评注 …… 94
§2.8 复值函数的 L'Hospital 法则 …… 95
§2.9 凸函数的等价定义 …… 98
第三章 积分 …… 101
§3.1 导读 …… 101

§3.2 关于 Riemann 积分的定义 …… 102
3.2.1 历史简述 …… 102
3.2.2 Riemann 可积的等价形式 …… 103
3.2.3 评注 …… 108
§3.3 关于 Stieltjes 积分的定义 …… 109
§3.4 两种推广的 Riemann 积分 …… 113
3.4.1 微积分基本定理 …… 113
3.4.2 函数的可积性与存在原函数之间的关系 …… 115
3.4.3 Riemann 积分的几种推广 …… 118
3.4.4 评注 …… 127
§3.5 积分中值定理 …… 128
3.5.1 积分中值定理的一个简洁证明 …… 128
3.5.2 积分中值定理的推广 …… 130
3.5.3 积分中值定理中间值的唯一性 …… 135
3.5.4 积分中值定理中间值的渐近状态 …… 138
3.5.5 评注 …… 139
§3.6 Riemann 引理与 Dirichlet 引理的推广 …… 140
3.6.1 Riemann 引理的推广 …… 140
3.6.2 Dirichlet 引理的推广 …… 147
3.6.3 评注 …… 149
§3.7 广义积分 …… 150
3.7.1 广义积分可作为和式极限的几个结论 …… 150
3.7.2 广义积分的几个收敛判别法 …… 155
3.7.3 应用举例 …… 161
3.7.4 评注 …… 163
§3.8 几种重要积分的计算 …… 163
3.8.1 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 的几种计算法 …… 163
3.8.2 概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 的新算法 …… 170
3.8.3 Euler 积分新算法 …… 172
3.8.4 Froullani 积分的推广 …… 174
3.8.5 Fresnel 积分新算法 …… 176
3.8.6 Γ 函数的特征 …… 178

3.8.7 定积分的公理定义 …… 180
3.8.8 评注 …… 181
第四章 级数 …… 183
§4.1 导读 …… 183
§4.2 数项级数 …… 184
4.2.1 正项级数敛散性判别法 …… 184
4.2.2 几种正项级数判别法的比较 …… 189
4.2.3 正项级数的两个等价判别法 …… 195
4.2.4 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法 …… 197
4.2.5 级数绝对收敛的导数判别法 …… 200
4.2.6 级数的 Cauchy 乘积 …… 201
4.2.7 无穷级数与广义积分收敛的某些必要条件 …… 204
4.2.8 无穷级数的积分判别法的推广 …… 205
4.2.9 评注 …… 209
§4.3 函数项级数 …… 209
4.3.1 Dirichlet 判别法与 Abel 判别法 …… 209
4.3.2 关于函数项级数的 Fubini 定理 …… 212
4.3.3 函数项级数的亚一致收敛 …… 214
4.3.4 关于积分号下取极限 …… 219
4.3.5 函数项级数的逐项微分 …… 222
§4.4 幂级数 …… 224
4.4.1 幂级数逐项微分定理的一个简单证明 …… 224
4.4.2 Taylor 公式的另一种证明 …… 225
4.4.3 关于 Taylor 公式的余项 …… 227
4.4.4 Taylor 公式的推广 …… 231
4.4.5 每个幂级数必是某个函数的 Taylor 级数 …… 233
§4.5 三角级数 …… 234
4.5.1 系数趋于零而又处处发散的三角级数的例子 …… 234
4.5.2 Fourier 级数收敛定理的一个新证明 …… 236
4.5.3 评注 …… 239
第五章 多元函数 …… 241
§5.1 导读 …… 241
§5.2 多元函数极限的定义 …… 241

5.2.1 两种定义 …… 242
5.2.2 两种定义的比较 …… 242
§5.3 几个基本概念之间的关系 …… 244
§5.4 多元函数的微分 …… 247
5.4.1 一类函数可微与连续可微的特征 …… 247
5.4.2 关于可微性 …… 248
5.4.3 二阶混合偏导数相等的定理 …… 251
5.4.4 评注 …… 257
§5.5 二元函数与一元函数性质的基本差异 …… 258
§5.6 多元函数的极值 …… 261
5.6.1 多元函数极值的一阶微分判别法 …… 261
5.6.2 关于最大(小)值的一个例子 …… 264
5.6.3 最大、最小值的极限形式及其应用 …… 265
§5.7 多元凸函数 …… 269
5.7.1 凸函数的连续性 …… 269
5.7.2 凸函数的可微性 …… 272
5.7.3 凸函数序列 …… 274
5.7.4 凸函数项级数 …… 277
5.7.5 评注 …… 280
§5.8 多元函数的次微分 …… 280
5.8.1 定义与性质 …… 280
5.8.2 Lipschitz 函数的次微分 …… 282
5.8.3 次微分的中值定理 …… 285
5.8.4 评注 …… 288
§5.9 多元函数积分的几个问题 …… 288
5.9.1 二重积分与累次积分之间的关系 …… 288
5.9.2 关于函数乘积积分的一个定理 …… 293
5.9.3 含参变量的无穷限广义积分的绝对收敛与一致收敛性 …… 294
5.9.4 恰当微分的线积分 …… 296
§5.10 二重级数收敛判别法 …… 298
§5.11 中值公式及 Kantorovich 不等式的推广 …… 303
5.11.1 向量值函数的中值不等式 …… 303

5.11.2 Kantorovich 不等式的推广 …… 305
参考文献 …… 309

第一章　极限与连续

§1.1　导读

本章主要研究有关极限与连续函数的一些问题. 在§1.2中，概述函数概念的历史演进；介绍周期函数的两种常用定义，并比较这两种定义的差异. §1.3中讨论极限的几个问题，主要内容有：Cauchy数列的几种弱形式之间的关系；数列$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$收敛的几种证明方法(这些证法均不同于现行教科书中的证法)，Euler常数与数e，使不等式$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant(1+\frac{1}{n})^{n+\beta}$成立的$\alpha$的最大值与$\beta$的最小值(其中$n$为任意自然数)；用等价无穷小替换法求极限的一个推广；关于数列极限的一个定理；复合函数的极限. 在§1.4中讨论连续函数，主要内容有：一对一的连续函数；连续函数的逐次逼近序列；收敛保持函数；在无理点连续而在有理点间断的严格单调函数；无处单调的连续函数；单调函数之商. §1.5中讨论了闭区间上连续函数性质的几个问题：闭区间上连续函数最大值存在性定理的几种证法；几个基本定理证明的统一处理方法；Weierstrass逼近定理的一个初等证明. 在§1.6中，介绍了函数一致连续的几个等价命题、函数乘积的一致连续性以及使函数连续且一致连续的点集的性质. 本章最后一节考虑了是否存在在每个区间上都能取到一个真正局部极大值的函数的问题，并介绍了两个例子，肯定地回答了这个问题.

§1.2　函数概念

1.2.1　函数概念的历史演进

函数概念在数学中是基本的. 这里，我们对函数概念的历史演

进作一个简要的介绍.

历史上,原始的函数观念伴随着数学的出现而产生.但明确提出"函数"一词,并将其作为数学概念来研究,则是在17世纪以后的事.从17世纪以来,函数概念经历了由具体到抽象、由粗略到精确的形成与发展过程.

16和17世纪,由于社会实践的需要,自然科学转向了对各种"运动"进行研究.在实践中,人们发现了许多具体的运动规律,并尝试用语言和文字对这种运动中的数量关系进行描述.例如,Galileo在他创立近代力学的著作《两门新科学》中,就用文字和比例的语言表达了这种关系.从书中可以清楚地看到,他对大量运动规律的叙述,的确是在讨论变数和函数.此后,随着代数符号化的扩展,他又把对运动规律的文字叙述表述为符号形式.但这种叙述与具体运动问题联在一起,看不到反映和概括运动问题的一般数学量观念(参看[140],第二册,pp. 43—46).进入17世纪后,通过对曲线的研究,产生了对"运动"意义的新看法,出现了"动点的轨迹"这个概念.例如,Galileo证明了把物体斜抛向空中时,它的路径是一条抛物线的结论,因而也就可把这曲线看作是动点的轨迹.把曲线看作是动点的轨迹,就从数学的量的方面概括了物体的运动,为提出一般函数概念打下了基础.

在现存文献中,最早把"函数"这个词正式作为数学术语并赋予其意义的数学家,是Leibniz.1673年,他在一篇手稿里用"函数"一词表示任何一个随着曲线上的点的变动而变动的量.例如,切线、法线、次切线等的长度以及纵坐标等.至于曲线本身,据他说是由一个方程式给出的(参看[140],第二册,pp. 43—46).显然,这里用函数一词表示"切线长"、"法线长"等所谓"量"的概念,在意义上还是模糊的.

在17世纪,人们通过对各种运动问题的研究,引进了大量函数以表示运动规律.这时使用的函数,一般还只限于简单的代数函数和超越函数.随着实践和研究的深入,进入18世纪以后,人们对初等函数有了比较充分的认识,迫切需要提出更加明确的函数概

念.

最先明确给出函数概念的意义和符号的数学家是 Bernoulli, Johann. 1697 年,他曾谈到过一个按任何方式用变量和常量构成的量. 这里的"任何方式"一词,按他的意思是指代数式和初等超越式. 第二年,即 1698 年,他采用了 Leibniz 的"函数"一词,作为他这个量的名字,并用 ξ 表示 x 的函数. 到了 1718 年,他又改用 φx 表示 x 的函数. 此后,1734 年,Euler 引进了函数记号 $f(x)$. 1748 年,Euler 在其所著的《无穷小分析引论》一书的开头,将函数进一步定义为由一个变量与一些常量,通过任何方式形成的解析表达式(参看[140],第二册,pp. 123—125). 由于这时连接变量和常量的主要运算是代数运算和超越运算,因此,Euler 索性把用这些运算连接变量和常量而成的式子,取名为解析表达式,即把函数定义为解析函数. 这种关于函数是由一个解析表达式给出的观点统治了近一个世纪——18 世纪(参看[140],第二册,pp. 123—125). Bernoulli, Johann 和 Euler 关于函数的定义,进一步从数量上揭示了各种运动的规律,在一定程度上适应了当时自然科学解决问题的需要. 但是,这两个定义,由于外延过狭,致使一些无法用解析式表示的函数被排斥在外,因而具有局限性.

1748 年,Euler 在提出解析函数定义的同时,还提出了另一个更为广泛的所谓"随意函数"的定义. 他认为,在坐标平面内,函数就是一条可以任意描画的曲线. 他把这样的曲线所表示的 y 与 x 间的关系叫做"随意函数". 这个定义表明,函数可由任意曲线单独确定,而无论曲线是否能用公式给出. 这样,就拓广了函数概念的外延. 但是,这一定义与前述两个定义间存在明显的冲突. 为解决这一矛盾,当时采取了一种折衷的办法:把能用一个解析式表示的曲线,其解析式叫做"真函数";对不能用一个解析式表示的曲线,虽也称其为"随意函数",但把它叫做"假函数"(参看[46]). 显然,这种把能否用一个解析式表示的曲线划分为"真"、"假"函数的方法,并未将上面的定义和前述的两个定义从本质上协调统一起来,因而没有真正地解决问题.

1807 年，Fourier 提出：任何函数都可用一个三角级数式予以表示(参看[83]，pp. 209—210). 这也表明，解析式和曲线之间并没有不能逾越的鸿沟. 用函数表示方法的“单一”与否来划分函数的真伪，是没有根据的. 这样，Fourier 级数的出现，动摇了函数的解析定义和曲线定义. 人们逐渐认识到：这两个定义都还未能揭示出函数的本质特征，对函数的认识仍然停留在表面阶段. 因此，如何从理论上进一步揭示出上述诸定义的本质联系，使之归于统一，便成了人们面临的重要问题. 另一方面，函数概念缺乏科学的定义，也引起了理论与实践的矛盾. 这两个方面导致了科学的函数定义的产生.

1834 年，Cauchy 给函数下了这样的定义：若对于变量 x 的每一个值，变量 y 按照某种对应规律有完全确定的值与之对应，则 y 称为 x 的函数(参看[46]). 按照这个定义，只要对于 x 的每一个值，y 有完全确定的值与之对应，那么，y 就是 x 的函数. 至于 y 是否用一个式子或几个式子表示，以及是否要通过式子表示都无关紧要. 显然，Cauchy 的函数定义抓住并揭示了函数概念的本质特征——对应关系. 从而彻底澄清了函数和解析式、曲线概念之间的纠缠，把人们对函数概念的认识推进到科学的阶段. 但需要指出的是，Cauchy 对他当时所给的函数，仍然考虑的是 x 和 y 的关系用解析式表示的情况，而这一点是不必要的. 1837 年，几乎在同时，Dirichlet 和 Riemann 进一步给出了函数的如下定义：对于 x 的每一个值，只要 y 有完全确定的值与之对应，不论 x，y 所建立的对应方式如何，y 都叫做 x 的函数. 在这以前，Dirichlet 曾给出了一个函数的例子：它对一切有理数取值 c 而对一切无理数取值 d，这就是著名的 Dirichlet 函数. 这个定义明确地强调与突出了函数概念与 x，y 之间的对应方式的无关性. 这就克服了 Cauchy 函数定义的不足，使函数概念建立在更加科学的基础之上.

但是，函数概念的演进并未结束. 随着生产实践和科学实验的不断扩大，又引起函数概念的新矛盾. 一方面，在上述定义中，无论是自变量还是函数，其对象仅只限于“数”，并且定义中提出的“变

量”概念，从数学角度看，含义也较模糊. 另一方面，在定义中，“对应”一词的意义也不够明确，即没有明确揭示出函数概念最核心的性质——对应法则. 这就要求人们对函数定义作进一步的探索和变革.

19 世纪 70 年代，Cantor 的集合论出现以后，人们把函数明确地定义为集合间的对应关系：若对于集合 M 中的每个元素 x，都有集合 N 中的一个元素 y 与之对应，则称 y 为 x 的函数. 显然，这个定义中的“元素”，不仅限于是数，还可以是任何别的事物. 这就大大拓宽了函数的研究范围，使函数概念能够广泛应用于数学的各个分支及其它学科中. 此外，这个定义还摆脱了在数学上较模糊的“变量”概念. 但这个定义仍然引用了意义不明确的“对应”概念.

随着数学的发展及对数学基础研究的深入，1914 年 Hausdorff 在他的《集合论纲要》一书中，采用“序偶”概念来定义函数：函数 f 是从集合 A 到集合 B 中的映射，即是由有序偶 $(x,y)\in f$ 组成的一个非空集合，其中 $x\in X\subset A, y\in Y\subset B$，且对于每一个 $x\in X$，只有一个 y 与之组成序偶. 这一定义，克服了意义不明确的“对应”概念，明确地提出了函数的对应法则 f. 不过，这一定义又引用了“序”的概念. 1921 年，库拉托夫斯基进一步引用集合的概念来定义序偶，即

$$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

称为一个序偶. 这样，就避开了必须先定义“序”的概念(参看[83], pp. 209—210). 由此，逐步产生了现代数学所广泛采用的函数定义：设 f 是一个序偶集合，若当 $(x,y)\in f$，且 $(x,z)\in f$ 时，$y=z$，则 f 称为一个函数. 这个定义是用集合先定义序偶，然后再定义函数概念的. 显然，这一定义只涉及到了“集合”这一个不定义的原始概念. 这样，它就克服了前面所述的函数定义的缺点，使函数概念像其它现代数学概念一样，完全建立在集合概念的逻辑基础上. 至此，函数概念就更加精确化、一般化了.

注 1 这段材料主要取自文献[25]. 关于函数的定义，还可参看文献[168]，其中列出了从 Bernoulli, Johann 到 Bourbaki 的函

数概念的一些定义.

1.2.2 关于周期函数的定义

周期函数有多种定义,这些定义虽然都揭示了周期函数最基本的特征,但它们之间也存在着差别.在这一段中,我们介绍两种常见的周期函数的定义,并比较其差异.

定义 1 对于函数 f,若存在一个非零的常数 T,使得当自变量 x 取定义域内的每一个值时,$f(x+T)=f(x)$ 都成立,那么就把 f 叫做周期函数,T 叫做这个函数的周期.

定义 2 设 f 是定义在某一数集 M 上的函数,若存在非零的常数 T,使得:(i)对 $x\in M$,有 $x\pm T\in M$;(ii)对于任意的 $x\in M$,有 $f(x+T)=f(x)$,那么称 f 为数集 M 上的周期函数,T 称为 f 的一个周期.

这两个定义是不一样的,主要表现在下列几个方面:

(a) 定义 2 意义下的周期函数必然符合定义 1,反之不成立.

例 1 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in N,\\ 1, & x\in[1,+\infty)\backslash N,\end{cases}$$

其中 N 为自然数集.则按定义 1,f 是周期函数.事实上,对任一自然数 n,若 $x\in N$,则有 $x+n\in N$,故 $f(x+n)=f(x)$;若 $x\in[1,+\infty)\backslash N$,则有 $x+n\in[1,+\infty)\backslash N$,故仍有 $f(x+n)=f(x)$.因此,任何自然数 n 都是 f 在定义 1 意义下的周期.但按定义 2,f 却不是周期函数.事实上,由于 f 的定义域是 $[1,+\infty)$,若 f 有周期 $T<0$,则 $1+T\notin[1,+\infty)$;若 f 有周期 $T>0$,则 $1-T\notin[1,+\infty)$.因此,任何非零常数 T 都不能满足定义 2 中的(i),也就都不是 f 在定义 2 意义下的周期.

(b) 对于定义 2 意义下的周期函数 f,若 T 是 f 的周期,则 $-T$ 也是 f 的周期,进而可知,定义 2 意义下的周期函数必有正周期.对于定义 1 意义下的某些周期函数 f,虽然 T 是 f 的周期,但

是$-T$却不是f的周期(如例1).而定义1意义下的某些周期函数只有负周期.

例2 定义函数f:

$$f(x)=x-[x],x\in(-\infty,0].$$

则f是定义1意义下的周期函数,但它没有正周期.事实上,对任一$x\in(-\infty,0]$,都有

$$f(x-1)=(x-1)-[x-1]=x-[x]=f(x).$$

故-1是f的定义1意义下的周期.若f有周期$T>0$,则$0+T\notin(-\infty,0]$,因而$f(0+T)=f(0)$不可能成立,故f在定义1意义下的周期不是正数.

(c) 对于定义2意义下的周期函数f,若T是f的周期,则容易证明$\pm nT$(n为任意自然数)也是f的周期.因此,f的所有周期构成之集没有上、下界,它是关于原点对称的无限点集.对于定义1意义下的周期函数f,当T是f的周期时,只能证出nT(n为自然数)也是f的周期,即f的周期集合至少是一方无界的.而对某些定义1意义下的周期函数,其周期集合仅只是一方无界.

(d) 对于定义2意义下的周期函数f,若T_1与T_2是f的周期,则$T_1\pm T_2$也是f的周期.而对于定义1意义下的周期函数f,当T_1与T_2都是f的周期时,只能证明T_1+T_2也是f的周期,但T_1-T_2未必是f的周期.例如,在例1中,$T_1=1$与$T_2=2$都是f的周期,但$T_1-T_2=-1$不是f的周期.

(e) 可以证明,对于定义2意义下的周期函数f,若f是非常值函数且至少有一个连续点,则f必有最小正周期.然而,存在定义1意义下的非常值周期函数f,它在定义域内有连续点,但它没有正周期,当然也就没有最小正周期(如例2).

综上所述,我们在讨论周期函数的性质时,应先弄清它的定义方式,然后再进行讨论.

注2 本段材料主要取自文献[18].有关周期函数研究的文献很多,读者还可参看[3],[41],[67],[70],[71],[92]和[94]等.

§1.3 极限的几个问题

1.3.1 Cauchy 数列的几种弱形式间的关系

经典的 Cauchy 收敛准则给出了数列$\{a_n\}$收敛的充要条件，有下面几种表现形式：

（Ⅰ） $\{a_n\}$收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n(\varepsilon)$，当 $n,n'\geqslant n(\varepsilon)$时，就有 $|a_n-a_{n'}|<\varepsilon$.

（Ⅱ） $\{a_n\}$收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n(\varepsilon)$，当 $n\geqslant n(\varepsilon)$时，对任何 $m\in N$（N 代表自然数集），都有 $|a_{n+m}-a_n|<\varepsilon$.

（Ⅲ） $\{a_n\}$收敛的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n(\varepsilon)$，使得对任何 $m\in N$，都有 $|a_{n(\varepsilon)+m}-a_{n(\varepsilon)}|<\varepsilon$.

我们自然要问：当自然数集 N 代以它的真子集时，这些条件是否还是充分的？为回答这个问题，我们设 $P\subset N$，$s=\{a_n\}$是数列，并引入下列概念：

定义 1 称数列 s 在类 $\mathscr{M}(P)$中，是指对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n(\varepsilon)$，当 $n\geqslant n(\varepsilon)$且 $p\in P$ 时，有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$.

定义 2 称数列 s 在类 $\mathscr{N}(P)$中，是指对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 $n(\varepsilon)$，当 $p\in P$ 时，就有 $|a_{n(\varepsilon)+p}-a_{n(\varepsilon)}|<\varepsilon$.

定义 3 称数列 s 在类 $\mathscr{H}(P)$中，是指对任意 $\varepsilon>0$ 和 $m\in N$，存在自然数 $n(\varepsilon,m)\geqslant m$，当 $p\in P$ 时，就有 $|a_{n(\varepsilon,m)+p}-a_{n(\varepsilon,m)}|<\varepsilon$.

上述三个定义给出了 Cauchy 数列的三类弱形式. 我们用 $\mathscr{C}$ 代表一切收敛数列所成之集，则（Ⅰ）即为 $\mathscr{C}=\{\text{Cauchy 数列}\}$；（Ⅱ）即为 $\mathscr{C}=\mathscr{M}(N)$；（Ⅲ）即为 $\mathscr{C}=\mathscr{N}(N)$.

可以证明，$\mathscr{C}\subset\mathscr{M}(P)\subset\mathscr{H}(P)\subset\mathscr{N}(P)$（参看[154]）. 但它们并不相等，例如：

(i) 存在 P，使 $\mathscr{M}(P)\neq\mathscr{C}$.

令 $P=\{p\mid p=2k,k\in N\}$，则在 $\mathscr{M}(P)$中存在发散数列. 事实

上，取 $s=\{a_n\}$，其中 $a_n=0, n=2m; a_n=1, n=2m-1; m\in N$. 显然，$s\in\mathscr{M}(P)$，且 s 发散.

(ii) 存在集 P，使 $\mathscr{M}(P)\neq\mathscr{H}(P)$.

考虑数列 $s=\{a_n\}$，其中 $a_n=0, n=4k-2; a_n=1, n=2k-1$ 或 $n=4k; k\in N$. 对每个 $m\in N$，我们取 $n(\varepsilon,m)=4k'\geqslant m$，则 $|a_{4k'+2k-1}-a_{4k'}|=0$，故 $s\in\mathscr{H}(P)$，这里 $P=\{p\mid p=2k-1, k\in N\}$. 然而 $s\notin\mathscr{M}(P)$.

(iii) 存在集 P，使 $\mathscr{H}(P)\neq\mathscr{N}(P)$.

考虑数列 $s=\{a_n\}$，其中 $a_n=0, n=1$ 或 $n=2k; a_n=1, n=2k+1; k\in N$. 易见，对任意 $\varepsilon>0$，我们取 $n(\varepsilon)=1$，则当 $p\in P$ 时，就有 $|a_{n(\varepsilon)+p}-a_{n(\varepsilon)}|=0$，故 $s\in\mathscr{N}(P)$，这里 $P=\{p\mid p=2k-1, k\in N\}$. 然而数列 s 不在 $\mathscr{H}(P)$ 中，因为对 $m>1$，我们取 $n(\varepsilon,m)=2k'>m$，则有 $|a_{2k'+2k-1}-a_{2k'}|=1$；若取 $n(\varepsilon,m)=2k'+1>m$，则有 $|a_{2k'+1+2k-1}-a_{2k'+1}|=1$.

由上列陈述和反例可知，当 N 代以它的真子集 P 时，(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)的充分性均不成立.

1.3.2 算术-几何平均值不等式的几种新证法

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正数，则有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}. \tag{1}$$

这就是著名的算术—几何平均值不等式. 在许多极限问题的证明以及其它应用问题中，我们常常要用到这个不等式. 下面，我们介绍它的三种新证法.

证法 1 令

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

$$G_n=(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}.$$

对 $n=2, A_2\geqslant G_2$ 显然成立. 设 $n=m$ 时不等式成立，即 $A_m\geqslant G_m$. 于是

$$A=\frac{a_{m+1}+(m-1)A_{m+1}}{m}\geqslant(a_{m+1}A_{m+1}^{m-1})^{\frac{1}{m}}$$
$$=G.$$

因此，

$$A_{m+1}=\frac{A_m+A}{2}\geqslant(A_m A)^{\frac{1}{2}}$$
$$\geqslant(G_m G)^{\frac{1}{2}}=(G_{m+1}^{m+1}A_{m+1}^{m-1})^{\frac{1}{2m}},$$

从而 $A_{m+1}\geqslant G_{m+1}$. 故(1)成立.

证法 2 显然，(1)中等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$. 令

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

不妨设 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 且 $a_1<a_n$，则显然有 $a_1<A_n<a_n$，因而

$$A_n(a_1+a_n-A_n)-a_1a_n=(a_1-A_n)(A_n-a_n)>0. \quad (2)$$

当 $n=2$ 时，不等式(1)显然成立. 设 $n-1$ 时不等式(1)成立. 由于 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1}$ 和 $a_1+a_n-A_n$ 的算术平均值是 A_n，即

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_1+a_n-A_n}{n-1}=A_n,$$

故由归纳法假设得 $A_n^{n-1}\geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-A_n)$. 由(2)得

$$A_n^n\geqslant A_n(a_1+a_n-A_n)a_2a_3\cdots a_{n-1}$$
$$\geqslant a_1a_na_2a_3\cdots a_{n-1},$$

即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

证法 3 设 a 是正数，n 是大于 1 的自然数. 容易验证

$$(a-1)[n-(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})]\leqslant 0,$$

或

$$a(n-a^{n-1})\leqslant n-1, \quad (3)$$

且不等式(3)除 $a=1$ 外是严格的. 令

$$a=\left(\frac{a_1}{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

则由不等式(3)得到

$$\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n \geqslant a_1\left(\frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}.$$

逐次应用这一公式,就得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n &\geqslant a_1\left(\frac{a_2+\cdots+a_n}{n-1}\right)^{n-1}\\ &\geqslant a_1a_2\left(\frac{a_3+\cdots+a_n}{n-2}\right)^{n-2}\\ &\geqslant \cdots \geqslant a_1a_2\cdots a_n,\end{aligned}$$

即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

注 1 不等式(1)的上述三种证法分别选自文献[116],[143]和[101].

注 2 张必华[52]借助于算术-几何平均值不等式,给出了不等式

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i}) \geqslant (n+\frac{1}{n})^n$$

(其中每个 $x_i>0$)的一个简捷证法.

定理 1 若 $\prod_{i=1}^{n} x_i=1, x_i>0$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i}) \geqslant (n+\frac{1}{n})^n.$$

证 由算术—几何平均值不等式得

$$\begin{aligned}&\frac{x_1}{x_1+\frac{1}{x_1}}+\frac{x_2}{x_2+\frac{1}{x_2}}+\cdots+\frac{x_n}{x_n+\frac{1}{x_n}}\\ &\geqslant \frac{n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}{\sqrt[n]{(x_1+\frac{1}{x_1})(x_2+\frac{1}{x_2})\cdots(x_n+\frac{1}{x_n})}};\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{1}{x_1}}{x_1+\frac{1}{x_1}}+\frac{\frac{1}{x_2}}{x_2+\frac{1}{x_2}}+\cdots+\frac{\frac{1}{x_n}}{x_n+\frac{1}{x_n}}$$

$$\geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{(x_1+\frac{1}{x_1})(x_2+\frac{1}{x_2})\cdots(x_n+\frac{1}{x_n})}}.$$

上面两个不等式相加得

$$n \geqslant \frac{n\left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\right)}{\sqrt[n]{(x_1+\frac{1}{x_1})(x_2+\frac{1}{x_2})\cdots(x_n+\frac{1}{x_n})}},$$

即

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i}) \geqslant \left(\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}\right)^n.$$

又因 $x_1+x_2+\cdots+x_n \geqslant n\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，故

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} \geqslant n \geqslant 1.$$

而函数 $y=u+\frac{1}{u}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是单增的，令

$$u_1=\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}}, \quad u_2=n,$$

则 $u_1 \geqslant u_2$，从而 $u_1+\frac{1}{u_1} \geqslant u_2+\frac{1}{u_2}$，即

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}} \geqslant n+\frac{1}{n},$$

因此

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i}) \geqslant (n+\frac{1}{n})^n.$$

证毕.

1.3.3 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$与Euler常数

1. 数e存在性的几种证法.

数列$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$的极限就是无理数$e$. 这个极限存在性的证明归结为证明数列$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$单增且有上界. 下面我们介绍这个极限的几种证明方法,这些证法均不同于现行的教科书.

证法1 我们先利用平均值不等式

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

($a_1,a_2,\cdots,a_n$都是正实数)给出简单的证明,并进一步导出较强的结果.

(i) 据平均值不等式,当若干个正数不全相等时,其几何平均数小于算术平均数,所以

$$\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^n\cdot 1}<\frac{n(1+\frac{1}{n})+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

从而

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

即数列$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$单增.

(ii) 据平均值不等式,当$n>5$时有

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{5}{6}\right)^6\cdot 1^{n-5}}<\frac{6\cdot\frac{5}{6}+(n-5)\cdot 1}{n+1}=\frac{n}{n+1},$$

从而$\left(\frac{5}{6}\right)^6<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$,所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{6}{5}\right)^6<3.$$

上式是在$n>5$时导出的,但由于数列$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$单增,所以

当 $n\leqslant 5$ 时也成立. 这就表明，数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 有上界 3. 证毕.

据(ii)的证明思想，可以导出更强的结果：任意取定一个自然数 m，则当 $n>m$ 时有

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}\cdot 1^{n-m}}<\frac{(m+1)\cdot\frac{m}{m+1}+(n-m)\cdot 1}{n+1}$$

$$=\frac{n}{n+1},$$

从而

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}.$$

上式是在 $n>m$ 时导出的，但由于数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 单增，所以当 $n\leqslant m$ 时也成立. 这就表明，对任何一个取定的自然数 m，数 $\left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1}$ 都是数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ 的上界.

因此，(ii)的结果只是上述一般结果的特殊情形. 利用一般结果，有助于我们估计数 e 的范围.

证法 2 我们再借助于不等式 $1+(n+1)x<(1+x)^{n+1}$ 给出一个简单证明，式中 $x>0$，n 是自然数. 令 $a_n=(1+1/n)^{n+1}$，$b_n=(1-1/n)^n$，$c_n=(1+1/n)^n$，则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}$$

$$> \frac{\left[1+\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} > 1,$$

所以$\{a_n\}$单减. 由于$b_{n+1}=1/a_n$,故$\{b_n\}$单增. 而

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{\left[\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}$$

$$=\frac{\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\left[\frac{b_{(n+1)^2}}{b_{n+1}}\right]^{\frac{1}{n+1}}>1,$$

可见$\{c_n\}$单增. 再由$c_n \leqslant a_n$便知$\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$,其公共极限就是数$e$. 证毕.

证法 3 利用不等式

$$\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n, 0 \leqslant a < b. \tag{4}$$

也可证明数e的存在性. 事实上,由不等式(4)得

$$b^n[(n+1)a-nb] < a^{n+1}. \tag{5}$$

取$a=1+1/(n+1)$,$b=1+1/n$,则$(n+1)a-nb=1$,故由不等式(5)得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \tag{6}$$

若取$a=1$,$b=1+1/(2n)$,则$(n+1)a-nb=1/2$. 故由不等式(5)得$(1+1/(2n))^n/2<1$. 两端同乘 2 再平方得

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4. \tag{7}$$

由不等式(6)与(7)知$\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$单增且有上界 4,故极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n$存在.

2. Euler 常数与数e

在下面的讨论中,我们要将对数函数定义为一个变动上限的

积分，并由此给出极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$与极限

$$r=\lim_{n\to\infty}[(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})-\ln(n+1)]$$

的存在性证明.

定义对数函数为

$$\ln x=\int_1^x t^{-1}dt\ ,\ln e=\int_1^e t^{-1}dt=1\ .$$

应用分部积分，得到

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\ln x\,dx=\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\ln\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\ln\left[\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right]-\frac{1}{n(n+1)}\ .\qquad(8)$$

另一方面，据积分中值定理，有

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\ln x\,dx=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ln c_n,\qquad(9)$$

其中$1/(n+1)<c_n<1/n$. 由(8)、(9)得到

$$\ln\left[\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right]-1=\ln c_n$$

或

$$\ln\left[\frac{(n+1)^n}{c_n n^{n+1}}\right]=1\ ,$$

从而

$$e=\frac{(n+1)^n}{c_n n^{n+1}}=(1+\frac{1}{n})^n\frac{1}{n\,c_n}\ .$$

据c_n上的条件，有$1<1/(nc_n)<1+1/n$. 令$a_n=1/(nc_n)$，则$1<a_n<1+1/n$. 从而$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，且对任意自然数$n$，有

$$e=a_n(1+\frac{1}{n})^n.$$

由上式及$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，便得$\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=e$.

在$e=a_n(1+1/n)^n$两边取对数，得

$$1 = \ln a_n + n[\ln(n+1) - \ln n] .$$

取 $n=1,2,\cdots$，就得到

$$1 = \ln a_1 + \ln 2 - \ln 1 ,$$

$$\frac{1}{2} = \ln a_2^{\frac{1}{2}} + \ln 3 - \ln 2 .$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n} = \ln a_n^{\frac{1}{n}} + \ln(n+1) - \ln n .$$

再两边相加，得到

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$$
$$= \ln(a_1 a_2^{\frac{1}{2}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}}) .$$

因 $a_n > 1$，故数列 $\{\ln(a_1 a_2^{\frac{1}{2}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}})\}$ 是单增的，而且

$$\ln(a_1 a_2^{\frac{1}{2}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}}) = \ln a_1 + \frac{1}{2}\ln a_2 + \cdots + \frac{1}{n}\ln a_n$$

$$< \ln(1+\frac{1}{1}) + \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n}) . \quad (10)$$

因对任意自然数 n，$e=(1+1/n)^n 1/(nc_n)$，而 $1/(nc_n)>1$，故 $(1+1/n)^n<e$. 又因函数 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是严格单增的，所以

$$\ln 1 < \ln(1+\frac{1}{n})^n < \ln e ,$$

即 $0<\ln(1+1/n)<1/n$. 再由不等式(10)，得到

$$\ln(a_1 a_2^{\frac{1}{2}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}}) < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} .$$

因此，数列 $\{\ln(a_1 a_2^{\frac{1}{2}} \cdots a_n^{\frac{1}{n}})\}$ 有上界 $\pi^2/6$.

综上所述，极限

$$r = \lim_{n\to\infty}[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)]$$

存在. 称此极限值 r 为 Euler 常数.

3. 对一切 n，使 $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha} \leqslant e \leqslant (1+\frac{1}{n})^{n+\beta}$ 成立的 α 的最大值与 β 的最小值

对一切自然数 n，使不等式

$$(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant(1+\frac{1}{n})^{n+\beta} \tag{11}$$

成立的 α 的最大值与 β 的最小值是什么？为了回答这个问题，我们对不等式(11)取对数，得

$$\alpha_{\max}=\inf_n\left\{\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}-n\right\},$$

$$\beta_{\min}=\sup_n\left\{\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{n})}-n\right\}.$$

考虑函数

$$F(x)=\frac{1}{\ln(1+\frac{1}{x})}-x,\quad x\in(0,+\infty).$$

当 $x>0$ 时，有

$$F'(x)=\frac{1}{x(x+1)\left[\ln(1+\frac{1}{x})\right]^2}-1.$$

令 $1+1/x=e^{2u}$，便得

$$F'(x)=\frac{\left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2}{u^2}-1$$

$$=\frac{\mathrm{sh}^2u}{u^2}-1>0.$$

因此，函数 F 在$(0,+\infty)$上是严格单增的. 由此可知，

$$\alpha_{\max}=\frac{1}{\ln 2}-1=0.4426950,$$

$$\beta_{\min}=\lim_{n\to\infty}F(n).$$

据 $\ln(1+x)$的 Maclaurin 级数的表达式，有

$$F(n)=\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3})\right]^{-1}-n.$$

于是，$\beta_{\min}=\lim_{n\to\infty}F(n)=1/2$.

注 3 上述计算方法选自文献[139].

1.3.4 用等价无穷小替换求极限法的一个推广

利用等价无穷小替换的方法求极限,可以简化某些求两个无穷小之比的极限的过程,是求极限的一个有效方法.

定理 2 两个无穷小之比,如将它们用各自的等价无穷小代替,则所得的极限不变. 也就是,如果 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$,则有

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}},$$

其中 $\alpha\sim\bar{\alpha}$ 表示 α 与 $\bar{\alpha}$ 是等价无穷小,$\beta\sim\bar{\beta}$的意义类似.

定理 2 的证明可参看通常的数学分析教材. 在应用等价无穷小替换法求极限时,需要注意的是,对和或差中的项一般不能作等价无穷小替换. 例如,极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sqrt{3}\sin x}{e^x-1+\sin x}$$

中的 $\sin x$ 不能用与它等价的无穷小 x 代替.

下面,我们来讨论对"和或差中的项"可用等价无穷小替换的条件. 这类问题的研究,不仅可以解决教学中遇到的实际问题,同时,也可使"等价无穷小替换求极限"的传统方法得到推广.

引理 1 设 a,b 及 k 都是无穷小,且

$$\lim\frac{a}{b}=0,\qquad \lim\frac{k}{b}\neq -1.$$

则有

$$\lim\frac{a}{b+k}=0.$$

证

$$\lim\frac{a}{b+k}=\lim\frac{a}{b(1+\frac{k}{b})}$$

$$=\frac{\lim\frac{a}{b}}{1+\lim\frac{k}{b}}=0.$$

定理 3 设无穷小 $\alpha,\bar{\alpha},\beta$ 及 $\bar{\beta}$ 满足 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta}$ 且 $\lim\frac{\beta}{\alpha}\neq-1$，则

$$\alpha+\beta\sim\bar{\alpha}+\bar{\beta}.$$

证 由于

$$\frac{(\alpha+\beta)-(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{\alpha+\beta}=\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{\alpha+\beta}+\frac{\beta-\bar{\beta}}{\alpha+\beta},$$

又据引理 1，有

$$\lim\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{\alpha+\beta}=0,\quad \lim\frac{\beta-\bar{\beta}}{\alpha+\beta}=0.$$

所以

$$\lim\frac{(\alpha+\beta)-(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{\alpha+\beta}=0,$$

即 $\alpha+\beta\sim\bar{\alpha}+\bar{\beta}$.

推论 1 若 α 与 β（或 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\beta}$）同时为正（或同时为负），则有 $\alpha+\beta\sim\bar{\alpha}+\bar{\beta}$.

证 因为 $\alpha>0,\beta>0$，所以 $\lim\frac{\alpha}{\beta}\neq-1$. 故由定理 3，$\alpha+\beta\sim\bar{\alpha}+\bar{\beta}$.

推论 2 设无穷小 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ 满足 $\alpha\sim\bar{\alpha},\beta\sim\bar{\beta},\gamma\sim\bar{\gamma},\delta\sim\bar{\delta}$，且

$$\lim\frac{A\alpha}{B\beta}\neq-1,\qquad \lim\frac{C\gamma}{D\delta}\neq-1,$$

其中 A,B,C,D 均为常数，则有

$$\lim\frac{A\alpha+B\beta}{C\gamma+D\delta}=\lim\frac{A\bar{\alpha}+B\bar{\beta}}{C\bar{\gamma}+D\bar{\delta}}.$$

证 由定理 3 可得 $A\alpha+B\beta\sim A\bar{\alpha}+B\bar{\beta},C\gamma+D\delta\sim C\bar{\gamma}+D\bar{\delta}$. 再由定理 2 就可得到推论 2. 证毕.

本段给出的引理 1，定理 3 及其推论，对求某些极限问题来说，是一种简捷的方法.

例 1 求

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x+\sqrt{3}\sin x}{e^{x}-1+\sin x}.$$

解 因

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sqrt{3}\,x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{\sqrt{3}\,x}=0\neq -1\ ,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}\neq -1\ ,$$

故据推论 2,可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\sqrt{3}\sin x}{e^x-1+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+\sqrt{3}\,x}{x+x}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ .$$

例 2 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x+\sin 2x}{\operatorname{tg}x-3\operatorname{arc}\sin 2x}\ .$$

解 由于 $\sin(\sin x)\sim x$,$\operatorname{tg}x\sim x$,$-3\operatorname{arc}\sin 2x\sim -6x$,且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x}{\sin 2x}=\frac{1}{2}\neq -1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{-6x}=-\frac{1}{6}\neq -1,$$

故由推论 2 得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sin x+\sin 2x}{\operatorname{tg}x-3\operatorname{arc}\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x}{x-3(2x)}=-\frac{3}{5}\ .$$

关于多个无穷小之和等价的无穷小问题,我们有下述定理.

定理 4 如果无穷小

$$\begin{cases}\alpha_1\sim\bar{\alpha}_1,\\ \alpha_2\sim\bar{\alpha}_2,\\ \cdots\\ \alpha_n\sim\bar{\alpha}_n,\end{cases}\quad\text{且}\begin{cases}\lim\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}\neq -1\ ,\\ \lim\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_3}\neq -1\ ,\\ \cdots\cdots\\ \lim\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{\alpha_n}\neq -1\ ,\end{cases}$$

则有

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\sim\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2+\cdots+\bar{\alpha}_n,\quad n\geqslant 3\ .$$

证 由数学归纳法得证.

例 3 求

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 10x}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin 10x}$$

解 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}\neq -1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x+2x}{3x}=1\neq -1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin 9x}{\sin 10x}=\frac{1+2+\cdots+9}{10}\neq -1,$$

所以

$$x+\sin 2x+\cdots+\sin 10x\sim x+2x+\cdots+10x,$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\sin 10x}{\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin 10x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+10x}{x+2x+\cdots+10x}=\frac{1}{5}.$$

注 4 本段材料主要选自文献[72].

1.3.5 关于数列极限的一个定理

求数列极限的方法很多,这里我们介绍求数列极限的一个新方法.它通过对数列的相邻项作线性组合,把数列转化成一个易求极限的新数列,从而由新数列的极限得到原数列的极限.用这种方法求某类数列的极限是极为方便的.

定理 5 若数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$满足关系式 $y_n=c_1x_{n-1}+c_2x_n(n\geqslant 2)$, c_1, $c_2>0$, $c_1<c_2$. 则$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$ 的充要条件是$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A/(c_1+c_2)$.

证 充分性. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$,则由 $y_n=c_1x_{n-1}+c_2x_n$ 知$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在,记为 A. 于是

$$A=\lim_{n\to\infty}y_n=c_1\lim_{n\to\infty}x_{n-1}+c_2\lim_{n\to\infty}x_n=(c_1+c_2)B,$$

从而 $B=A/(c_1+c_2)$.

必要性. 若$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=A$,要证$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在(记为 B),且有 $B=A/(c_1+c_2)$.

因对任意 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n\geqslant N$ 时有 $|y_n-A|<(c_2-c_1)\varepsilon/2$(下面先把 A 记成 $A=(c_1+c_2)B$,再直接证明 B 为 $\{x_n\}$ 的极限). 于是有

$$\begin{aligned}\frac{(c_2-c_1)\varepsilon}{2} &> |y_n-A|\\ &= |c_1x_{n-1}+c_2x_n-(c_1+c_2)B|\\ &\geqslant c_2|x_n-B|-c_1|x_{n-1}-B|\ ,\end{aligned}$$

所以有

$$|x_n-B|<\frac{(c_2-c_1)\varepsilon}{2c_2}+\frac{c_1}{c_2}|x_{n-1}-B|\ .$$

由此,归纳地可以推得

$$\begin{aligned}|x_{N+m}-B| &< \frac{c_2-c_1}{2c_2}\varepsilon+\frac{c_1}{c_2}|x_{N+m-1}-B|\\ &< \frac{c_2-c_1}{2c_2}\varepsilon+\frac{c_1}{c_2}\left(\frac{c_2-c_1}{2c_2}\varepsilon+\frac{c_1}{c_2}|x_{N+m-2}-B|\right)\\ &= \frac{c_2-c_1}{2c_2}\left(1+\frac{c_1}{c_2}\right)\varepsilon+\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2|x_{N+m-2}-B|\\ &< \frac{c_2-c_1}{2c_2}\left[1+\frac{c_1}{c_2}+\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\right]\varepsilon+\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^3|x_{N+m-3}-B|\\ &< \cdots < \frac{c_2-c_1}{2c_2}\varepsilon\cdot\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^i+\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^m|x_N-B|\\ &< \frac{c_2-c_1}{2c_2}\varepsilon\cdot\frac{c_2}{c_2-c_1}+\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^m|x_N-B|\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^m|x_N-B|\ .\end{aligned}\tag{12}$$

对上述 $\varepsilon>0$,由 $0<c_1/c_2<1$,可取充分大的自然数 m,使

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^m|x_N-B|<\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

今记 $N+m=n_0$,于是,对任意 $\varepsilon>0$,存在自然数 n_0,当 $n>n_0$ 时,由(12)得 $|x_n-B|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=B$. 证毕.

由于级数的收敛性等价于它的部分和数列的收敛性,故定理

5 的结果对级数也适用.

根据上面的定理 5，当我们要求数列$\{x_n\}$的极限时，如能按定理的条件把它转化成一个结构比较简单且易求其极限的数列$\{y_n\}$，则通过求$\{y_n\}$的极限便可容易地求出$\{x_n\}$的极限. 兹举例说明如下：

例 4 设

$$x_n=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)}{2^n},$$

证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限.

证 $2x_n=1-\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}-\frac{7}{2^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)}{2^{n-1}}$，

$$x_{n-1}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\cdots+(-1)^{n-2}\frac{(2n-3)}{2^{n-1}},$$

令 $y_n=x_{n-1}+2x_n$，则有

$$y_n=1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]}{1+\frac{1}{2}},$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=1/3$. 故由定理 5 知数列$\{x_n\}$收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{1+2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

例 5 计算

$$s=\cos^3\varphi-\frac{1}{3}\cos^3 3\varphi+\frac{1}{3^2}\cos^3 3^2\varphi-\frac{1}{3^3}\cos^3 3^3\varphi+\cdots$$

解 记

$$s_n=\cos^3\varphi-\frac{1}{3}\cos^3 3\varphi+\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n}\cos^3 3^n\varphi,$$

则

$$s_{n-1}=\cos^3\varphi-\frac{1}{3}\cos^3 3\varphi+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}\cos^3 3^{n-1}\varphi.$$

于是

$$3s_n = 3\cos^2\varphi - \cos^3 3\varphi + \frac{1}{3}\cos^3 3^2\varphi - \cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{3^{n-1}}\cos^3 3^n\varphi .$$

令 $T_n = 3s_n + s_{n-1}$，则

$$T_n = 4\cos^3\varphi - \frac{4}{3}\cos^3 3\varphi + \frac{4}{3^2}\cos^3 3^2\varphi$$

$$- \cdots + (-1)^{n-1}\frac{4}{3^{n-1}}\cos^3 3^{n-1}\varphi + (-1)^n \frac{1}{3^{n-1}}\cos^3 3^n\varphi .$$

由三角公式 $4\cos^3\varphi = 3\cos\varphi + \cos 3\varphi$ 可将上式恒等变形为

$$T_n = (3\cos\varphi + \cos 3\varphi) - \frac{1}{3}(3\cos 3\varphi + \cos 3^2\varphi)$$

$$+ \frac{1}{3^2}(3\cos 3^2\varphi + \cos 3^3\varphi) - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}(3\cos 3^{n-1}\varphi + \cos 3^n\varphi)$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{3^{n-1}}\cos^3 3^n\varphi$$

$$= 3\cos\varphi + (-1)^{n-1}\frac{1}{3^{n-1}}\cos 3^n\varphi$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{3^{n-1}}\cos^3 3^n\varphi .$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty} T_n = 3\cos\varphi$，据定理 5 得

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1+3} \cdot 3\cos\varphi = \frac{3}{4}\cos\varphi .$$

注 5 上述结论是由姜天权给出的.

1.3.6 复合函数的极限

关于复合函数的极限问题，我们有下述重要定理.

定理 6 若函数 f 和 g 满足下列两条件之一：

(i) f 在 u_0 连续，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$；

(ii) $\lim\limits_{u\to u_0} f(u) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = u_0$，

且在 x_0 的某个邻域 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 内，当 $x\neq x_0$ 时，$g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = \lim_{u\to u_0} f(u) .$$

这个定理具有很重要的意义，我们时常对自变量作代换来求极限，其实就是基于这个定理. 例如，求极限 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]$ 时，作代换 $u=g(x)$，而由 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$，把求 $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]$ 的问题化为求极限 $\lim_{u\to u_0} f(u)$. 然而，我们应当指出，这样作代换并不是永远通行无阻的，还必须注意定理的条件. 例如，设

$$f(u) = \begin{cases} 1, & u \neq 0 , \\ 0, & u = 0 . \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}, p \text{ 与 } q \text{ 是互质的整数且 } q > 0 , \\ 0 , & x = 0 \text{ 或为无理数} . \end{cases}$$

显然，$\lim_{u\to 0} f(u)=1$，$\lim_{x\to 0} g(x)=0$. 但是，若取 x 为无理数，则 $g(x)=0$，从而

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)] = 0 .$$

若取 x 为有理数，$x=p/q$，$x\neq 0$，则 $g(x)=1/q$，从而

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)] = 1 .$$

可见 $\lim_{x\to 0} f[g(x)]$ 不存在.

上述反例表明，在讨论 $\lim_{x\to 0} f[g(x)]$ 时，若不考虑定理 6 的条件，而轻易地作代换 $u=g(x)$，并从 $\lim_{x\to 0} g(x)=0$ 和 $\lim_{u\to 0} f(u)=1$ 来断定

$$\lim_{x\to 0} f[g(x)] = \lim_{u\to 0} f(u) = 1 ,$$

那就是错误的.

注 6 Pamankutty 和 Vamanamurthy[158] 进一步指出：如果 $\lim_{x\to a} g(x)=A$，$\lim_{u\to A} f(u)=B$，那么，或者 $\lim_{x\to a} f[g(x)]=B$，或者 $\lim_{x\to a} f[g(x)]=f(A)$，或者 $\lim_{x\to a} f[g(x)]$ 不存在.

证 任给 $\varepsilon>0$，则存在 $r>0$ 和 $\delta>0$，使得当 $0<|u-A|<r$

时，有

$$|f(u)-B|<\varepsilon,$$

而当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|g(x)-A|<r.$$

(i) 若存在 a 的邻域 $U(a)$，使得对任何 $x\in U(a)\backslash\{a\}$，都有 $g(x)\neq A$，则可选取 $\delta>0$ 使 $(a-\delta,a+\delta)\subset U(a)$，从而当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $o<|g(x)-A|<r$，故

$$\lim_{x\to a} f[g(x)]=B.$$

(ii) 若(i)不成立，则对 a 的每个邻域 $U(a)$，存在 $x\in U(a)\backslash\{a\}$，使 $g(x)=A$. 由此可知，或者

$$\lim_{x\to a} f[g(x)]=f(A),$$

或者 $\lim\limits_{x\to a} f[g(x)]$ 不存在.

1.3.7 评注

在数学分析中，极限是一个核心内容，同时它本身又是研究问题的工具. 因此，在各类数学分析书籍中，都有相当的篇幅讨论极限. 本节我们只选择了极限的几个问题加以讨论.

有关 Cauchy 数列的几种弱形式的材料来源于文献[154]. 数 e 存在性的三种证明方法分别取自文献[23]，[115]和[135]；杨翰深[66]也利用平均值不等式给出了数 e 存在性的简捷证明，并提供了精确度较高的计算 e 的近似值的方法. 有关数列 $\{(1+1/n)^n\}$ 收敛性的其它证明方法还可参看文献[54]和[79]等. 定义 Euler 常数的数列的收敛性，也可用其它方法证明，本节所介绍的方法选自文献[104]. 我们只知道 Euler 常数的存在性，至于 Euler 常数是有理数还是无理数，是代数数还是超越数，这是目前尚未解决的一个难题.

§1.4 连续函数

1.4.1 一对一的连续函数

可以构造从实数集$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的连续函数，它在有理数集上是一对一的，但并非处处是一对一的(参看[184]，p. 59). 我们自然要问：可否把有理数集代以无理数集？下面的定理表明，这个问题的答案是否定的.

定理 1 不存在从实数集$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的连续函数，它在无理数集上是一对一的，但并不是处处一对一的.

证 反设存在这样的连续函数f，那么由于它并非处处一对一，故存在有理数$a,b,a<b$，使得$f(a)=f(b)=h$.

集$A=\{x\in[a,b]\mid f(x)=h\}$在$[a,b]$中并不稠密，否则$f$在$[a,b]$上将为常值函数. 于是，存在$A$中两点$a'<b'$，使$(a',b')$中没有$A$的点. 据连续函数的介值定理，开区间$(a',b')$的象$f((a',b'))$中的元或者都大于$h$，或者都小于$h$. 假如是前者(后者类似)，则

$$f([a',b'])=[h,f(m)],$$

其中$h<f(m),m\in(a',b')$. 于是

$$f([a',m])=f([m,b'])=[h,f(m)].$$

因f在无理数集上是一对一的，故由上式可知，f必映$[a',m]$的无理点到$[m,b']$的有理点的象上. 这样一来，一个不可数集被一对一地映射到一个可数集上. 这是不可能的.

1.4.2 连续函数的逐次逼近序列

容易证明，若$f:[0,1]\to[0,1]$是连续满射，则f在$[0,1]$上必有不动点，即存在$x_0\in[0,1]$使得$f(x_0)=x_0$.

对$x_1\in[0,1]$，令$x_{n+1}=f(x_n)$，称$\{x_n\}$为f的逐次逼近序列. 若$\{x_n\}$收敛，则它显然收敛于f的不动点. 下面的定理给我们提供了连续函数f的逐次逼近序列的一个收敛特征.

定理 2 设 $f:[0,1]\to[0,1]$是连续满射，$x_1\in[0,1]$，$\{x_n\}$是 f 的逐次逼近序列，则$\{x_n\}$收敛于 f 的不动点的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$.

证 必要性. 设$\{x_n\}$收敛于 f 的不动点，则显然有

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

充分性. 设$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. 如果数列$\{x_n\}$不收敛，那么，由于$[0,1]$是有界闭区间，故存在$\{x_n\}$的两个子列，它们分别收敛于 ξ_1 与 $\xi_2(\xi_1\neq\xi_2)$. 不妨设 $\xi_1<\xi_2$，于是，只要证明对一切 $x\in(\xi_1,\xi_2)$，都有 $f(x)=x$，从而由 f 的连续性即可导出矛盾.

现在就来证明对一切 $x\in(\xi_1,\xi_2)$，都有 $f(x)=x$.

假如不然，则存在 $x^*\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $f(x^*)\neq x^*$. 于是，由 f 的连续性可知，存在 $\delta>0$，使得对一切 $\bar{x}\in(x^*-\delta,x^*+\delta)([x^*-\delta,x^*+\delta]\subset(\xi_1,\xi_2))$，都有 $f(\bar{x})\neq\bar{x}$. 不妨设

$$\bar{x}-f(\bar{x})>0. \tag{1}$$

据定理的条件，可取充分大的自然数 n_0，使得当 $n\geqslant n_0$ 时，都有

$$|f^n(x)-f^{n+1}(x)|<\delta,$$

其中 $f^n(x)=f(x_n)=x_{n+1}$，$f^{n+1}(x)=f(x_{n+1})=x_{n+2}$. 由于$[x^*-\delta,x^*+\delta]\subset(\xi_1,\xi_2)$，且 ξ_2 是$\{x_n\}$的聚点，故必有自然数 $n>n_0$，使得 $f^n(x)=x_{n+1}>x^*$. 令 n_1 为满足上述条件的最小自然数，则显然有

$$f^{n_1-1}(x)=x_{n_1-1}<x^*<x_{n_1}=f^{n_1}(x). \tag{2}$$

由于 $f^{n_1}(x)-f^{n_1-1}(x)<\delta$，故由不等式(1)得到

$$f^{n_1-1}(x)-f^{n_1}(x)>0,$$

从而 $f^{n_1}(x)<f^{n_1-1}(x)<x^*$. 这与不等式(2)发生矛盾.

1.4.3 收敛保持函数

我们知道，当数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 未必收敛. 例如，令 $a_n=(-1)^n/\sqrt{n}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散. 现在我

们考虑用一个函数 f 在 a_n 的值 $f(a_n)$ 去代替 a_n^2，那么对于什么样的函数 f，能由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性推出 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 的收敛性？为使行文方便，先引入下述定义.

定义 1 设 f 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数. 称 f 为收敛保持函数，是指对每个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ 也是收敛的.

定理 3 设 f 是定义在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数，为使 f 是收敛保持函数，当且仅当存在常数 k，使得在 0 的某个邻域内有 $f(x)=kx$.

证 首先证明在 0 的某个邻域内，f 是有限可加的，即满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

事实上，令 $g(x,y)=f(x+y)+f(-x)+f(-y)$. 假如不存在 0 的某个邻域，使 g 在该邻域上恒等于 0，那么可取收敛于 0 的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$，使得 $g(x_n,y_n)\neq 0$. 令

$$M_n=[|g(x_n,y_n)^{-1}|]+1,$$

式中 $[|g(x_n,y_n)^{-1}|]$ 表示不超过 $|g(x_n,y_n)^{-1}|$ 的最大整数. 考虑下述级数：

$$\begin{aligned}&(x_1+y_1)-x_1-y_1+(x_1+y_1)-x_1-y_1+\cdots\\&+(x_1+y_1)-x_1-y_1+(x_2+y_2)-x_2-y_2+\cdots\\&+(x_2+y_2)-x_2-y_2+\cdots+(x_n+y_n)-x_n-y_n+\cdots\end{aligned}\tag{3}$$

我们用 S_M 代表级数(3)的前 M 项之和，其中级数(3)中的项 $(x_n+y_n)-x_n-y_n$ 共重复 M_n 次. 于是，对某个 $n=n(k)$，有 $S_{3k}=0$，$S_{3k+1}=x_n+y_n$，$S_{3k+2}=y_n$. 且当 $k\to\infty$ 时，有 $n(k)\to\infty$，故得

$$\lim_{k\to\infty} S_{3k}=\lim_{k\to\infty} S_{3k+1}=\lim_{k\to\infty} S_{3k+2},$$

即级数(3)收敛于 0，再记级数(3)为 $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$. 因 f 是收敛保持函数，

故 $\sum_{m=1}^{\infty} f(a_m)$ 收敛. 由于形如 $(x_n+y_n)-x_n-y_n$ 的项共有 M_n 项，故据函数 g 的定义，便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n g(x_n, y_n)$ 也收敛. 但这是不可能的，因为 $|M_n g(x_n, y_n)|>1$. 这个矛盾说明了存在 0 的某个邻域 U，使 g 在 U 上恒等于 0，即当 $|x|+|y|$ 充分小时，有

$$f(x+y)+f(-x)+f(-y)=0. \tag{4}$$

在(4)中令 $x=y=0$，便得 $f(0)=0$. 再令 $y=0$，便得 $f(x)=-f(-x)$，即 f 是奇函数. 于是在 U 上

$$f(x+y)=f(x)+f(y).$$

其次，我们证明 f 在 $x=0$ 处连续. 为此，任取收敛于 0 的数列 $\{a_n\}$. 显然，级数

$$a_1-a_1+a_2-a_2+\cdots+a_n-a_n+\cdots$$

收敛. 因 f 是奇函数，故级数

$$f(a_1)-f(a_1)+f(a_2)-f(a_2)+\cdots+f(a_n)-f(a_n)+\cdots$$

也收敛，从而当 $a_n\to 0$ 时，$f(a_n)\to 0$. 因此，当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to 0$. 又 $f(0)=0$，故 f 在 $x=0$ 处连续.

任取 $x_0\in U$，$x_0\neq 0$. 易证，对任意非 0 整数 n，有 $f(x_0/n)=f(x_0)/n$，从而对任意有理数 r，$|r|\leqslant 1$，有 $f(r\,x_0)=r\,f(x_0)$. 于是，$f(x)=kx$，$x\in[-x_0, x_0]$，$k=f(x_0)/x_0$.

反之，若 $f(x)=kx$，则 f 显然是收敛保持函数. 证毕.

1.4.4 在无理点连续而在有理点间断的严格单增函数

设 $r_1, r_2, \cdots, r_i, \cdots$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的全部有理点，令

$$f(x)=\sum_{r_i<x}\frac{1}{2^i},$$

这里，按一切使 $r_i<x$ 的那些下标 i 求和. 因为所给的级数总是收敛的，所以这个函数对一切实数 x 都有意义. 又因为对任意两个实数 x_1, x_2，$x_1<x_2$，总存在有理数 r_{i_0}，使得 $x_1<r_{i_0}<x_2$，所以

$$f(x_2)\geqslant f(x_1)+\frac{1}{2^{i_0}}>f(x_1).$$

现在证明，这个函数 f 在每个有理点 r 都是间断的。事实上，对任一 $x>r$，有

$$f(x)=\sum_{r_i<x}\frac{1}{2^i}=\sum_{r_i<r}\frac{1}{2^i}+\sum_{r\leqslant r_i<x}\frac{1}{2^i}.$$

假定有理点 r 的下标为 n，那么 $\sum\limits_{r\leqslant r_i<x}\frac{1}{2^i}>\frac{1}{2^n}$，因此

$$f(x)>\sum_{r_i<r}\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^n}=f(r)+\frac{1}{2^n}.$$

在这个不等式中，令 $x\to r^+$（即 x 保持大于 r 而趋于 r），而取极限，就得到 $f(r+0)\geqslant f(r)+1/2^n$. 由此可见，函数 f 在每个有理点 r_n 处都是右间断的，而且它的右方跃度 $f(r_n+0)-f(r_n)\geqslant 1/2^n$，因而 f 在点 r_n 处间断.

最后证明，函数 f 在其它点都是连续的，且在有理点 r_n 处的跃度等于 $1/2^n$. 这个结论可以从下面的考虑得出：对于单调函数而言，它的上界和下界之差大于或等于一切跃度之和，而

$$\sup_i f(x)=\sum_i\frac{1}{2^i}=1,\quad \inf_i f(x)=0,$$

所以一切跃度之和 S 满足不等式：$S\leqslant 1$. 另一方面，一切跃度之和大于或等于诸点 r_n 处的右方跃度之和，所以 $S\geqslant\sum\limits_i\frac{1}{2^i}=1$. 因而在诸点 r_n 处的右方跃度之和等于函数的全部可能跃度. 由此可知，函数 f 在其它各点均连续，且在点 r_n 处的跃度恰好等于 $1/2^n$.

1.4.5 无处单调的连续函数

我们来考虑下述问题：若函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则是否必有非空子区间 $(a,b)\subset(-\infty,+\infty)$，使得 f 在 (a,b) 上是单调的？下面的例子将说明这个问题的答案是否定的.

当 $|x|\leqslant 1/2$ 时，设 $f_1(x)=|x|$，而在其它的点 x 处，用 1 为周期来延拓 $f_1(x)$，即对每个实数 x 和整数 n，都有 $f_1(x+n)=f_1(x)$. 当 $n>1$ 时，定义 $f_n(x)=4^{-n+1}f_1(4^{n-1}x)$，于是对每个整数 n，f_n 是有周期 4^{-n+1} 的周期函数，其极大值为 $4^{-n+1}/2$. 最

后，以$(-\infty,+\infty)$为定义域规定f：

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

因为$|f_n(x)|\leqslant 4^{-n+1}/2$，所以据 Weierstrass 判别法，这级数在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛. 因而f在$(-\infty,+\infty)$上连续.

在任何形如$a=k4^{-m}$的点处(其中k是整数，m是自然数)，当$n>m$时，就有$f_n(a)=0$，从而

$$f(a)=f_1(a)+\cdots+f_m(a).$$

对于任何自然数m，设h_m是正数4^{-2m-1}. 于是，当$n>2m+1$时$f_n(a+h_m)=0$，所以

$$\begin{aligned}f(a+h_m)-f(a)&=[f_1(a+h_m)-f_1(a)]\\&+\cdots+[f_m(a+h_m)-f_m(a)]+f_{m+1}(a+h_m)\\&+\cdots+f_{2m+1}(a+h_m)\\&\geqslant -mh_m+(m+1)h_m=h_m>0.\end{aligned}$$

同理可得

$$f(a-h_m)-f(a)\geqslant h_m>0.$$

由于形如$a=k4^{-m}$的点在$(-\infty,+\infty)$中是稠密的，所以f不可能在一个开区间内单调.

1.4.6 关于单调函数之商

容易证明，若函数f在闭区间$[0,a]$上非负单增，则函数$\frac{1}{t}\times\int_0^t f(u)du$在$(0,a]$上单增.

上述结果还可作如下推广：

定理 4 设函数f在闭区间$[a,b]$上非负单增，g在$[a,b]$上非负单减. 令

$$F(t)=\int_a^t f(u)du,\qquad G(t)=\int_a^t g(u)du,$$

$h=F/G$，$S=\{t\mid t\in[a,b],G(t)\neq 0\}$，则函数$h$在集$S$上单增.

证 设$a<t_1<t_2\leqslant b$，$t_1,t_2\in S$，则

$$h(t_2)-h(t_1)=\frac{F(t_2)}{G(t_2)}-\frac{F(t_1)}{G(t_1)}$$

$$=\frac{1}{G(t_2)}\int_a^{t_2}f(u)du-\frac{1}{G(t_1)}\int_a^{t_1}f(u)du$$

$$=\frac{1}{G(t_2)G(t_1)}\left[G(t_1)\int_a^{t_2}f(u)du-G(t_2)\int_a^{t_1}f(u)du\right]$$

$$=\frac{1}{G(t_2)G(t_1)}\left\{G(t_1)\int_{t_1}^{t_2}f(u)du+[G(t_1)-G(t_2)]\cdot\int_a^{t_1}f(u)du\right\}$$

$$=\frac{1}{G(t_2)G(t_1)}\left[\int_a^{t_1}g(x)dx\int_{t_1}^{t_2}f(y)dy-\int_{t_1}^{t_2}g(y)dy\int_a^{t_1}f(x)dx\right]$$

$$=\frac{1}{G(t_2)G(t_1)}\iint_D[g(x)f(y)-g(y)f(x)]dxdy$$

$\geqslant 0$，

其中 $D=[a,t_1]\times[t_1,t_2]$，而 $(x,y)\in D$ 蕴涵 $x\leqslant y$. 可见 $0\leqslant f(x)\leqslant f(y)$，$g(x)\geqslant g(y)\geqslant 0$，从而 $f(x)g(y)\leqslant g(x)f(y)$，故最后的积分非负. 因此，$h(t_2)\geqslant h(t_1)$，即 h 在 S 上单增. 证毕.

在定理 4 中，若 $g(b)>0$，则在 $[a,b]$ 上 $g(x)>0$. 故此时 $S=(a,b]$. 若 $g(b)=0$，但对某个 $c\in(a,b)$ 有 $g(c)>0$，则在 $[a,c]$ 上 $g(x)>0$，故仍有 $S=(a,b]$. 若在 $[a,b]$ 上 $g(x)\equiv 0$，则 $S=\varnothing$. 因此，只要 $g(x)\not\equiv 0$，就恒有 $S=(a,b]$.

注 1 若 f 非正且单减，g 非正且单增，则定理 3 的结论仍成立. 这只要令 $f_0=-f$，$g_0=-g$ 即可.

又，从定理 4 的证明中可以看出，若函数 g 恒为正(负)常数，则关于函数 f 的非负(非正)的条件可以去掉. 这一事实在下述定理的证明中要用到.

定理 5 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上单增，则对任何 $t\in(a,b)$，恒有

$$\frac{1}{t-a}\int_a^t f(u)du\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du$$

$$\leqslant\frac{1}{b-t}\int_t^b f(u)du.$$

证 令 $F(t)=\int_a^t f(u)du$，$G(t)=\int_a^t 1\,du=t-a$. 由定理 4 的

注 1 可知，函数 $h=F/G$ 在 $(a,b]$ 上单增，因此第一个不等式成立. 第二个不等式可如下得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-t}\int_t^b f(u)du &= \frac{b-a}{b-t}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\\ &-\frac{t-a}{b-t}\cdot\frac{1}{t-a}\int_a^t f(u)du\\ &\geqslant \frac{b-a}{b-t}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du-\frac{t-a}{b-t}\cdot\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\\ &=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du\ .\end{aligned}$$

注 2 定理 4 与定理 5 是由 Mott[152]得到的. 若 f 在 $[a,b]$ 上单减，则定理 4 的结论应取相反的不等式.

1.4.7 评注

在 Wilansky 的书[184]中，构造了一个从实数集 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数，它在有理数集上是一对一的，但并不是处处一对一的. White[183]指出，不能把有理数集代以无理数集，这就是本节的定理 1.

逐次逼近序列是数学中的一个重要概念. 1966 年，Chu 和 Moyer 在[112]中给出了连续函数的逐次逼近序列的各种收敛特征。本节定理 2 给出的连续函数的逐次逼近序列的另一收敛特征是由 Hillam[131]于 1976 年得到的，随后，Smart 在文献[173]中指出，定理 2 不能推广到高于一维的欧氏空间。

收敛保持函数的概念是由 Wildenberg[185]于 1988 年引入的。他还证明了为使函数 f 是收敛保持函数，当且仅当存在常数 k，使得在 0 点的某个邻域内有 $f(x)=kx$. Wildenberg 的证法比较复杂，且在证明过程中要论证函数 f 的可微性. 本节介绍的证明方法是由 Smith[174]提供的. 这个证法既简单，又避免了论证函数 f 的可微性.

如所周知，连续函数未必单调. 人们会问： 如果函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续， 那么是否一定存在某个开区间 $(a,b)\subset$

$(-\infty,+\infty)$，使得 f 在 (a,b) 上是单调的？本节构造了一个定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，它在 $(-\infty,+\infty)$ 的每个子区间 (a,b) 上都不是单调的，从而否定地回答了上述问题. Katznelson 和 Stromberg[138]进一步构造了一个处处可微而无处单调的函数. 其实，还可构造无处单调的绝对连续函数（参看[44]，pp. 334—335）.

§1.5 闭区间上连续函数的性质

1.5.1 闭区间上连续函数最大值存在性定理的几种证法

这里，我们介绍闭区间上的连续函数必能取得最大值这一重要定理的三种证法.

证法 1 设 J_1,J_2 是闭区间 $I=[a,b]$ 的两个子区间，且 $J_1\supset J_2$. 若对每一 $x\in J_1$，都有 $y\in J_2$，使得 $f(y)\geqslant f(x)$，则记作 $J_1\gg J_2$. 显然有

(i) 若 $J_1\gg J_2, J_2\gg J_3$，则 $J_1\gg J_3$；

(ii) 若 K 是 I 的闭子区间，把 K 等分为两个闭子区间 K_1，K_2，则或者有 $K\gg K_1$，或者有 $K\gg K_2$.

现在构造 I 的闭子区间列 $\{I_n\}$. 我们定义 $I_1=I$. 若 I_n 已经定义，就等分 I_n 为两个闭子区间 I_{n_1} 与 I_{n_2}. 由(ii)，至少有一个 j 使 $I_n\gg I_{n_j}(j=1,2)$，记此关系式成立的区间 I_{n_j} 为 I_{n+1}. 由(i)，对每一个 n 均有 $I\gg I_n$. 由于每个区间包含其后面一个区间，因而这些区间的左端点组成单增数列，且这个数列有界，故它收敛于 p. 显然，$p\in I$.

若存在 $q\in I$，使 $f(q)>f(p)$，则据 f 的连续性，存在 p 的一个邻域 $U(p)$，使得对一切 $x\in U(p)$ 有 $f(q)>f(x)$. 由于 I_n 的长度趋于 0，所以存在自然数 m，使 $I_m\subset U(p)$. 由这个关系式推知，对一切 $x\in I_m$ 有 $f(q)>f(x)$. 然而 $I\gg I_m$，故这是不可能的. 于是，对任意 $q\in I$，恒有 $f(p)\geqslant f(q)$，所以 f 在 p 取最大值. 由此还推

知，f 在 I 上有界.

证法 2 令

$$M=\{x\in[a,b]\mid f(x)\geqslant f(u)\text{ 对一切 }u\in[a,x]\}.$$

因 $a\in M$，故 M 非空且有上界 b. 令 $c=\sup M$. 任取 $x\in[a,b]$，令

$$y=\inf\{z\in[a,b]\mid f(z)\geqslant f(x)\}.$$

我们证明：(i) $f(y)\geqslant f(x)$. (ii) $y\in M$. (iii) $c\in M$. 由此可知，$y\leqslant c$ 且 $f(c)\geqslant f(y)\geqslant f(x)$. 于是对一切 $x\in[a,b]$ 有 $f(c)\geqslant f(x)$.

(i) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $u\in[a,b]$ 且 $y<u<y+\delta$ 时，有

$$|f(y)-f(u)|<\varepsilon.$$

据 y 的定义，存在 $z\in[a,b]$ 使 $y\leqslant z<y+\delta$，且 $f(z)\geqslant f(x)$. 因此，

$$\begin{aligned}f(y)&=f(z)+f(y)-f(z)\\&\geqslant f(z)-\varepsilon\geqslant f(x)-\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性知 $f(y)\geqslant f(x)$.

(ii) 据 y 的定义，不存在 u 使 $a\leqslant u<y$ 且 $f(u)\geqslant f(x)$. 因此，若 $a\leqslant u<y$，则

$$f(u)<f(x)\leqslant f(y),$$

故 $y\in M$.

(iii) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $z\in[a,b]$ 且 $|z-c|<\delta$ 时，有

$$|f(z)-f(c)|<\varepsilon.$$

假定 $a\leqslant u<c$，据 c 的定义，存在 $z\in M$ 使 $u\leqslant z\leqslant c$ 且 $|z-c|<\delta$. 因此

$$f(u)\leqslant f(z)=f(c)+f(z)-f(c)\leqslant f(c)+\varepsilon.$$

可见 $f(u)\leqslant f(c)$，从而 $c\in M$.

证法 3 令 $a_0=a,b_0=b,a_{n+1}$ 与 b_{n+1} 以 a_n 与 b_n 如下归纳地定义：令 $c_n=(a_n+b_n)/2$. 若存在一个数 $u\in[a_n,c_n]$ 使得对一切 $v\in[a_n,b_n]$ 有 $f(v)\leqslant f(u)$，则令 $a_{n+1}=a_n,b_{n+1}=c_n$. 若不然，即对每一个 $u\in[a_n,c_n]$，存在 $v\in[c_n,b_n]$，使 $f(v)>f(u)$，则令 $a_{n+1}=c_n$，$b_{n+1}=b_n$. 无论属于哪一种情形，都有：(i) $a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n$；(ii)

$b_{n+1}-a_{n+1}=(b_n-a_n)/2$；(iii)若 $x\in[a_n,b_n]$，则存在数 $y\in[a_{n+1},b_{n+1}]$，使 $f(x)\leqslant f(y)$.

这样，我们定义了一个闭区间列$[a_n,b_n](n=0,1,2,\cdots)$，具有性质：(i′)若 $n\geqslant m\geqslant 0$，则 $a_m\leqslant a_n\leqslant b_m\leqslant b_0$；(ii′)$b_n-a_n\to 0(n\to\infty)$；(iii′)若 $x\in[a,b]$，n_0 是非负整数，则存在 $y\in[a_{n_0},b_{n_0}]$，使 $f(x)\leqslant f(y)$.

据(i′)，数列$\{a_n\}$收敛，令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$，则 $c\in[a,b]$.

兹证对每一个 $x\in[a,b]$，有 $f(x)\leqslant f(c)$.

设 $x\in[a,b]$，并任取实数 $t>f(c)$. 由于 f 在$[a,b]$上连续且 $c\in[a,b]$，故存在 $\delta>0$，使得当 $y\in[a,b]$且$|y-c|<\delta$ 时，有 $f(y)<t$. 据(ii′)，可取 n_0 使 $b_{n_0}-a_{n_0}<\delta$. 于是据(iii′)，可取 $y^*\in[a_{n_0},b_{n_0}]$使 $f(x)\leqslant f(y^*)$. 由于 $c\in[a_{n_0},b_{n_0}]$，我们有

$$|y^*-c|\leqslant b_{n_0}-a_{n_0}<\delta.$$

因此，$y^*\in[a,b]$，从而 $f(y^*)<t$，$f(x)<t$，可见 $f(x)\leqslant f(c)$.

1.5.2 几个基本定理证明的统一处理方法

本段，我们要介绍数学分析中几个基本定理证明的一种统一处理方法. 为此，首先引入下面的定义和引理.

定义 1 闭区间$[a,b]$的闭子区间族 $\mathscr{C}$ 称为$[a,b]$的一个完全覆盖，是指对任一 $x\in[a,b]$，存在 $\delta(x)>0$，使得$[a,b]$的每个含有 x 且长度小于 $\delta(x)$的闭子区间都属于 $\mathscr{C}$.

引理 1 若 $\mathscr{C}$ 是$[a,b]$的一个完全覆盖，则 $\mathscr{C}$ 包含$[a,b]$的一个分划，即存在 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，使每个闭区间$[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$都属于 $\mathscr{C}$.

证 反设 $\mathscr{C}$ 不包含$[a,b]$的任何分划，则通过对$[a,b]$重复使用二等分法可得$[a,b]$的闭子区间列$\{J_n\}$，使 $J_n\supset J_{n+1}(n=1,2,\cdots)$，$|J_n|\to 0(n\to\infty)$，且 $\mathscr{C}$ 不包含任何一个 J_n 的任何一个分划，其中$|J_n|$代表区间 J_n 的长度. 由闭区间套定理，存在唯一的 $x\in J_n$ $(n=1,2,\cdots)$. 若 $\delta(x)$如定义 1 所述，则因 $|J_n|\to 0(n\to\infty)$，故存

在自然数 n_0，使 $|J_{n_0}|<\delta(x)$，从而 $J_{n_0}\in\mathscr{C}$. 于是，$\mathscr{C}$ 显然含有 J_{n_0} 的一个分划，矛盾.

定理 1 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

证 令

$$\mathscr{C}=\{I\mid I\text{ 是}[a,b]\text{ 的闭子区间，}f\text{ 在 }I\text{ 上有界}\}.$$

先证 $\mathscr{C}$ 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 为此，任取 $x\in[a,b]$，因 f 在 x 连续，故存在 $\delta(x)>0$，使 f 在区间 $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ 上有界（若 $x=a$ 或 b，则 $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ 分别换成 $[x,x+\delta(x))$ 或 $(x-\delta(x),x]$）. 现设 I 是含有 x 且长度小于 $\delta(x)$ 的 $[a,b]$ 的任一闭子区间，则 $I\subset(x-\delta(x),x+\delta(x))$. 于是 f 在 I 上有界，从而 $I\in\mathscr{C}$，即 $\mathscr{C}$ 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 据引理 1，$\mathscr{C}$ 包含 $[a,b]$ 的一个分划. 由于 f 在分划的每个小区间上有界，因而 f 在 $[a,b]$ 上有界.

定理 2 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$.

证 设不存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$. 令

$$\mathscr{C}=\{I\mid I\text{ 是}[a,b]\text{ 的闭子区间且 }f\text{ 在 }I\text{ 上同号}\},$$

则 $\mathscr{C}$ 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 事实上，设 $x\in[a,b]$，则因 f 在 x 连续且 $f(x)\neq0$，故存在 $\delta(x)>0$，使 f 在 $(x-\delta(x),x+\delta(x))$ 上与 $f(x)$ 同号. 若 I 是含有 x 且长度小于 $\delta(x)$ 的 $[a,b]$ 的闭子区间，则 $I\subset(x-\delta(x),x+\delta(x))$. 因此，$I\in\mathscr{C}$，从而 $\mathscr{C}$ 是 $[a,b]$ 的一个完全覆盖. 由引理 1，$\mathscr{C}$ 包含 $[a,b]$ 的一个分划 $I_1,I_2,\cdots,I_n$. 不妨设这些小区间是按自左至右的顺序编号的，可以看出，f 在 $[a,b]$ 上必具有同一符号. 这与已知发生矛盾，故必存在 $x_0\in(a,b)$，使 $f(x_0)=0$.

定理 3 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续.

证 任给 $\varepsilon>0$，令

$$\mathscr{C}=\{I\mid I\text{ 是}[a,b]\text{ 的闭子区间且对任意 }x,y\in I,$$

有 $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}\}$.

由 f 在$[a,b]$上的连续性，易证 $\mathscr{C}$ 是$[a,b]$的一个完全覆盖. 因此，$\mathscr{C}$ 包含$[a,b]$的一个分划 $I_1,I_2,\cdots,I_n$. 令

$$\delta=\min\{|I_i|\,|i=1,2,\cdots,n\}.$$

若$[a,b]$中的点 x 和 y 满足$|x-y|<\delta$，则 x,y 或者属于以上分划的同一子区间，或者属于两个相邻的子区间. 无论在哪种情况下，都有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，故 f 在$[a,b]$上一致连续.

定理 4(有限覆盖定理)　闭区间$[a,b]$的任一开覆盖都含有一个有限子覆盖.

证　设 G 是覆盖$[a,b]$的任一开集族，令

$\mathscr{C}=\{I|I$ 是$[a,b]$ 的闭子区间且是 G 中集合的子集$\}$.

显然，$\mathscr{C}$ 是$[a,b]$的一个完全覆盖，因此，它包含$[a,b]$的一个分划. 由于分划的每个小区间是 G 中某个元的子集，因此$[a,b]$可被 G 中有限个开集所覆盖.

定理 5(聚点原理)　若 S 是有界的无限集，则 S 必有聚点.

证　因 S 有界，故存在闭区间$[a,b]$，使 $S\subset[a,b]$. 假设 S 无聚点，令

$\mathscr{C}=\{I|I$ 是$[a,b]$ 的闭子区间且 $I\cap S$ 是有限集$\}$，

则 $\mathscr{C}$ 是$[a,b]$的一个完全覆盖. 于是，它包含了$[a,b]$的一个分划 $I_1,I_2,\cdots,I_n$. 由

$$S=S\cap[a,b]=S\cap(\bigcup_{i=1}^{n}I_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(S\cap I_i)$$

可知 S 是有限集，与已知矛盾.

1.5.3　Weierstrass 逼近定理的一个初等证明

Weierstrass 逼近定理是分析数学中极为重要的一个定理. 下面，我们给出该定理的一个初等而又简短的证明.

定理 6(Weierstrass 逼近定理)　任何一个在闭区间$[0,1]$上连续的函数 f 都可用多项式一致逼近. 即任给 $\varepsilon>0$，存在多项式 $p(x)$，使得对一切 $x\in[0,1]$，都有

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon .$$

证 容易用归纳法验证下述 Bernoulli 不等式成立：

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh \quad (h>-1,n \text{ 为自然数}).$$

我们考察多项式 $Q_n(x)=(1-x^n)^{2^n}$. 显然，当 x 从 0 变到 1 时，$Q_n(x)$的值从 1 单调地变到 0.

由 Bernoulli 不等式可知，在 $0\leqslant x\leqslant q<1/2$ 上，有

$$1\geqslant Q_n(x)\geqslant Q_n(q)=(1-q^n)^{2^n}$$
$$\geqslant 1-2^nq^n=1-(2q)^n\to 1(n\to\infty).$$

因而，当 $n\to\infty$时，$Q_n(x)$在 $0\leqslant x\leqslant q\leqslant 1/2$ 上一致收敛于 1. 在 $1/2<q\leqslant x<1$ 上，有

$$0\leqslant Q_n(x)\leqslant Q_n(q),$$

$$\frac{1}{Q_n(q)}=\left(\frac{1}{1-q^n}\right)^{2^n}=\left(1+\frac{q^n}{1-q^n}\right)^{2^n}$$
$$\geqslant 1+\frac{2^nq^n}{1-q^n}>(2q)^n\to\infty \quad (n\to\infty).$$

因而当 $n\to\infty$时，$Q_n(x)$在 $1/2<q\leqslant x\leqslant 1$ 上一致收敛于 0.

通过线性变换，我们可以从 $Q_n(x)$得到多项式 $P_n(x)=Q_n\left(\frac{1-x}{2}\right)$. 当 $|x|\leqslant 1$ 时，$P_n(x)$的值在 0 和 1 之间，同时，$P_n(x)$在 $0<\delta\leqslant|x|\leqslant 1$ 上一致收敛于阶梯函数

$$T(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

现设 f 在[0,1]上连续，并不妨设 $f(0)=0$，因为若 $f(0)=\alpha\neq 0$，则可取 $g=f-\alpha$ 代替 f. 对任意 $\varepsilon>0$，由于 f 在[0,1]上连续从而一致连续，故存在阶梯函数

$$T^*(x)=\sum_{i=1}^{m}s_iT(x-x_i),\quad 0<x_1<\cdots<x_m<1,$$

使得 $|f(x)-T^*(x)|<\varepsilon/3$ 在[0,1]上成立，而且 $|s_i|<\varepsilon/3$. 我们选取 $\delta>0$ 充分小，使各个区间$(x_i-\delta,x_i+\delta)(i=1,2,\cdots,m)$两两不相交；同时取 n 充分大，使得在 $0<\delta\leqslant|x|\leqslant 1$ 上有

$$|P_n(x) - T(x)| < \frac{\varepsilon}{3s},$$

其中 $s = \sum_{i=1}^{m} |s_i|$. 令

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i P_n(x - x_i),$$

则对 $x \in (x_k - \delta, x_k + \delta)$，从而对所有的 $x \in [0,1]$[1)]，有

$$\begin{aligned} |T^*(x) - P(x)| &\leqslant \sum_{i \neq k} |s_i| \, |T(x - x_i) - P_n(x - x_i)| \\ &\quad + |s_k| \, |T(x - x_k) - P_n(x - x_k)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3s} \cdot s + |s_k| \cdot 1 < \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} |f(x) - P(x)| &\leqslant |f(x) - T^*(x)| \\ &\quad + |T^*(x) - P(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

1.5.4 评注

闭区间$[a,b]$上的连续函数必在$[a,b]$上取得最大值，这是数学分析中最基本、最重要的定理之一. 关于这个定理的证法，通常是根据它在$[a,b]$上有界且能达到上确界来证明的. 本节介绍的三种证法分别属于 Fort[122]，Bernau[106]和 Pennington[159]. 这些证明都有独到的见解，很富于启发性.

众所周知，闭区间上的连续函数必定有界，且具有介值性质；闭区间上的连续函数必定一致连续. Botsko[108]用统一处理的方法证明了上述性质以及有限覆盖定理和聚点定理，即本节的定理 1 至定理 5. 其实，数学分析中还有一些定理如确界定理，闭区间套定理，单调有界定理等，也可用上述统一处理的方法给出证明.

---

1) 对于不属于$(x_k - \delta, x_k + \delta)(k = 1,2,\cdots,m)$的点 x，显然有

$$\begin{aligned} |T^*(x) - P(x)| &\leqslant \sum_{k} |s_k| \, |T(x - x_k) - P_n(x - x_k)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3s} \cdot s = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Weierstrass 逼近定理是数学中至关重要的一个定理. 至今，已有多种方法可以证明这一定理. 本节介绍的证法选自文献[114]，这个证法既初等又简短.

§1.6 一致连续函数

1.6.1 函数一致连续的等价命题

我们知道，函数 f 在区间 I 上连续是逐点性质，即对任意一点 $x_a\in I$ 及任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_a=\delta(x_a,\varepsilon)>0$，当 $|x-x_a|<\delta_a$ 时，就有

$$|f(x)-f(x_a)|<\varepsilon. \tag{1}$$

从函数连续性的定义可知，对于每一个 $x_a\in I$，使(1)式成立的 δ_a 有无穷多个. 记使(1)式成立的 δ_a 所成之集为

$$\Delta\varepsilon=\{\delta_a\mid \text{当 } |x-x_a|<\delta_a \text{ 时，有 } |f(x)-f(x_a)|<\varepsilon,\ x,x_a\in I\}.$$

我们取

$$\delta_a^*=\begin{cases}\sup\Delta\varepsilon, & \Delta\varepsilon \text{ 有上界},\\ 1, & \Delta\varepsilon \text{ 无上界}.\end{cases} \tag{2}$$

于是，对每一个 $x_a\in I$，便找到了使(1)式成立的唯一的一个 δ_a^*. 这样，就建立了 x_a 与 δ_a^* 之间的一一对应.

为了找出一致连续定义中的“公共 δ”，我们取集合 $\{\delta_a^*\mid x_a\in I\}$ 的下确界，即

$$\delta^*=\inf_{x_a\in I}\{\delta_a^*\}. \tag{3}$$

当 $\delta^*>0$ 时，δ^* 就是一致连续定义中的“公共 δ”.

现在，我们给出函数一致连续性的一些等价命题。

定理 1 设函数 f 在区间 I 上连续，则 f 在 I 上一致连续的充要条件是 $\delta^*>0$（δ^* 由(3)式定义）.

证 必要性. 设 f 在 I 上一致连续，即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任意的 $x,x'\in I$，当 $|x-x'|<\delta$ 时，就有

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

设 x' 为 x_a'，因 f 在 x_a' 连续，故对上述的 $\varepsilon>0$，存在唯一的 $\delta_a^*>0$，当 $|x-x_a'|<\delta_a^*$ 时，有

$$|f(x)-f(x'x_a)|<\varepsilon.$$

由(2)式可知，$\delta_a^*\geqslant\delta$. 由于 x_a' 是任意的，因而对 I 内的任一点，均有 $\delta_a^*\geqslant\delta$，所以

$$\delta^*=\inf_{x_a\in I}\{\delta_a^*\}\geqslant\delta>0.$$

充分性．设 $\delta^*>0$. 要证对任给的 $\varepsilon>0$ 及任意的两点 $x,x_a\in I$，当 $|x-x_a|<\delta^*$ 时，就有

$$|f(x)-f(x_a)|<\varepsilon.$$

事实上，因 f 在 x_a 连续，故对任给的 $\varepsilon>0$，存在唯一的 $\delta_a^*>0$，当 $|x-x_a|<\delta_a^*$ 时，就有

$$|f(x)-f(x_a)|<\varepsilon.$$

由(3)式知 $\delta^*\leqslant\delta_a^*$，故当 $|x-x_a|<\delta^*$ 时，就有

$$|f(x)-f(x_a)|<\varepsilon.$$

这就证明了 f 在 I 上是一致连续的．

定理 2 函数 f 在区间 I 上一致连续的充要条件是，任给 $\varepsilon>0$，存在实数 P，使得对任意的 $x,y\in I$，当 $|f(x)-f(y)|/|x-y|>P(x\neq y)$ 时，有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

证 必要性．假若不然，则存在 $\varepsilon_0>0$ 及两点 $x_0,y_0\in I$，使对任意实数 P，虽然有 $|f(x_0)-f(y_0)|/|x_0-y_0|>P$，但是 $|f(x_0)-f(y_0)|\geqslant\varepsilon_0$. 令

$$\alpha=|f(x_0)-f(y_0)|.$$

则存在自然数 $n>1$，使 $(n-1)\varepsilon_0\leqslant\alpha<n\varepsilon_0$. 再令 $\beta=\alpha/(n-1)$，则 $\varepsilon_0\leqslant\beta<2\varepsilon_0$. 不妨设 $x_0<y_0$，且 $f(x_0)<f(y_0)$，由于

$$f(x_0)<f(x_0)+\beta\leqslant f(x_0)+\alpha=f(y_0),$$

故由介值性质知，存在 $x_1(x_0<x_1\leqslant y_0)$，使

$$f(x_1)=f(x_0)+\beta.$$

同样存在 $x_2(x_1<x_2\leqslant y_0)$，使

$$f(x_2)=f(x_1)+\beta.$$

依次可得 $x_0<x_1<\cdots<x_n$，其中 $x_n=y_0$. 这时对任意 $i(i=1,2,\cdots,n)$，由于 $f(x_i)-f(x_{i-1})=\beta\geqslant\varepsilon_0$，据一致连续定义，必然有 $x_i-x_{i-1}\geqslant\delta$，从而

$$\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right|\leqslant\frac{n\beta}{n\delta}=\frac{\beta}{\delta}.$$

取 $P=2\varepsilon_0/\delta$，则

$$\left|\frac{f(x_0)-f(y_0)}{x_0-y_0}\right|\leqslant P.$$

矛盾.

充分性. 任给 $\varepsilon>0$，(i)若定理 2 中的 $P>0$，则可取 $\delta=\varepsilon/P$，于是当 $x,y\in I(x\neq y)$且 $|x-y|<\delta$ 时，或者有

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant P.$$

此时

$$|f(x)-f(y)|<P\delta=\varepsilon;$$

或者有

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|>P,$$

此时按题设有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

(ii) 若定理 2 中的 $P\leqslant 0$，则对任意的 $x,y\in I$，不等式 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ 恒成立.

综上所述，f 在 I 上一致连续. 证毕.

为讨论一致连续函数的其它等价条件，我们介绍下述定义.

定义 1 若数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足条件：(i)$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 存在(有限或无限)；(ii)$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$. 则称数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 是等价的.

对于数 a，趋于 a 的数列有无穷多个. 按等价的定义，这些数

列可进行分类．用 M_a 记所有 $x_n\to a$ 的类的集合．用 α 记 M_a 的元素，也就是 $x_n\to a$ 的一类．易知，当 a 为有限数时，M_a 仅含一类；当 a 为无穷时，M_a 有无穷类．用 I_a^b 表示以 a,b 为端点的任一个有限或无穷区间．

定理 3 设函数 f 在区间 $I_a^b=[a,b)$ 上连续且有界，则 f 在 I_a^b 上一致连续的充要条件是：对任意 $\alpha\in M_b$ 和任意 $\{x_n\},\{y_n\}\in\alpha$，都有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f(x_n)-f(y_n)|=0.$$

证 必要性．对任意的 $\alpha\in M_b$ 以及 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}\in\alpha$，因 f 在 I_a^b 上一致连续，故任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意 $x',x''\in I_a^b$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

因 $\{x_n\},\{y_n\}$ 是等价的，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，从而存在自然数 N，当 $n>N$ 时，就有 $|x_n-y_n|<\delta$，所以 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$．易知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f(x_n)-f(y_n)|=0.$$

充分性．设 $f(x)$ 在 $I_a^b=[a,b)$ 上不一致连续，则有 $\varepsilon_0>0$，设 $\{x_n\},\{y_n\}\subset[a,b)$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 且 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$．

从 $\{x_n\}\subset[a,b)$，可得 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{nk}\}$ 及 $c\in[a,b]$ 使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=c$，故 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=c$．易知 $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$．由条件 $c<b$．所以 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(c)$．因此有 $\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|=0$，矛盾。

对于 $I_a^b=(a,b]$，我们能得到类似结论，所以下面推论成立。

推论 1 设 f 在区间 I_a^b 上连续且有界，则 f 在 I_a^b 上一致连续的充要条件是

(i) 对任意的 $\alpha\in M_a$ 和 $\{x_n\},\{y_n\}\in\alpha$，都有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f(x_n)-f(y_n)|=0;$$

(ii) 对任意的 $\alpha\in M_b$ 和 $\{x_n\},\{y_n\}\in\alpha$，都有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|f(x_n)-f(y_n)|=0.$$

下面，我们列出函数一致连续的另外几个等价命题，其证明留给读者.

定理 4 有界区间(a,b)上的函数f为一致连续的充要条件是$f(a+0)$与$f(b-0)$均存在(有限).

定理 5 函数f在有界区间(a,b)上一致连续的充要条件是对于(a,b)中的任意 Cauchy 数列$\{x_n\}$，函数值数列$\{f(x_n)\}$也是 Cauchy 数列.

定理 6 函数f在区间I_a^b上一致连续的充要条件是对I_a^b上的任意两个数列$\{x_n\}$，$\{x_n'\}$，只要$x_n-x_n'\to 0$，就有$f(x_n)-f(x_n')\to 0(n\to\infty)$.

1.6.2 函数乘积的一致连续性

容易证明，定义在有界区间上的两个一致连续函数之乘积函数仍一致连续. 但应注意，定义在无界区间上的两个一致连续函数之积未必是一致连续的. 例如，函数$f(x)=x$和$g(x)=\sin x$在实数集$\mathbb{R}$上都是一致连续的. 但是，它们的乘积$f(x)g(x)=x\sin x$在$\mathbb{R}$上并不一致连续.

那么，在什么条件下，定义在无界区间上的两个一致连续函数之积仍是一致连续的？关于这个问题，我们有下列有趣的结果.

用$\mathscr{K}$表示定义在$[1,+\infty)$上非负一致连续的函数类.

引理 1 若$f\in\mathscr{K}$，则

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{f(x)}{x}<+\infty.$$

证 反设$\overline{\lim_{x\to+\infty}}f(x)/x=+\infty$，则存在数列$\{x_n\}$，使$x_n\to+\infty(n\to\infty)$，$x_{n+1}-x_n>1$，且若令$c_n=f(x_n)/x_n$，则$c_{n+1}\geqslant c_n$，$c_n\to+\infty$. 对每个自然数$n$，有

$$\begin{aligned}|f(x_{n+1})-f(x_n)|&=c_{n+1}x_{n+1}-c_nx_n\\&\geqslant c_n(x_{n+1}-x_n).\end{aligned}\tag{4}$$

取 $\varepsilon=1$，δ 是满足 $0<\delta<1$ 的任意数，则存在自然数 n_0，使得当 $n>n_0$ 时，有 $c_n>2/\delta$. 取 $n>n_0$，并选取 $t_1,t_2,\cdots,t_m$，使

$$x_n=t_1<t_2<\cdots<t_m=x_{n+1},$$

这里 $\delta/2<t_{i-1}-t_i<\delta(i=1,2,\cdots,m-1)$. 对某个 i，必有

$$|f(t_{i+1})-f(t_i)|\geqslant c_n(t_{i+1}-t_i),$$

否则，将有

$$\begin{aligned}|f(x_{n+1})-f(x_n)|&\leqslant\sum_{i=1}^{m-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|\\&<c_n(x_{n+1}-x_n),\end{aligned}$$

与(4)发生矛盾. 因此，

$$|f(t_{i+1})-f(t_i)|\geqslant c_n(t_{i+1}-t_i)>\frac{2}{\delta}\cdot\frac{\delta}{2}=1.$$

于是，f 在$[1,+\infty)$上不一致连续. 矛盾.

引理 2 若 $xf(x)\in\mathscr{K}$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-y|<\delta$ 时，就有

$$x|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

证 因 $xf(x)\in\mathscr{K}$，故由引理 1，存在常数 $M>0$，使 $f(x)<M$. 此外，存在 $\delta>0$，使 $\delta<\varepsilon/2M$，且当 $|x-y|<$ 时，有 $|xf(x)-yf(y)|<\varepsilon/2$. 因此

$$\begin{aligned}x|f(x)-f(y)|&\leqslant|xf(x)-yf(y)|\\&+f(y)|x-y|<\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

引理得证.

用 $\mathscr{K}^*$ 表示$[1,+\infty)$上的一切连续函数 f，使 $f\in\mathscr{K}$，且当 $g\in\mathscr{K}$ 时，有 $fg\in\mathscr{K}$.

定理 7 $f\in\mathscr{K}^*$ 的充要条件是 $xf(x)\in\mathscr{K}$.

证 必要性. 因为 $x\in\mathscr{K}$，所以必要性成立.

充分性. 设 $xf(x)\in\mathscr{K}$. 令 $\varepsilon>0$，$g(x)\in\mathscr{K}$. 据引理 1，存在常数 M_1 与 M_2，使 $f(x)<M_1$，$g(x)/x<M_2$. 又由对 $g(x)$ 的假设及引理 2，可选取 $\delta>0$，当 $|x-y|<\delta$ 时，有

$$|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2M_1},$$

$$y|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M_2}.$$

因此，当$|x-y|<\delta$时，就得到

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(y)g(y)| &\leqslant f(x)|g(x)-g(y)| \\ &\quad+\frac{g(y)}{y}\cdot y|f(x)-f(y)| \\ &<M_1\cdot\frac{\varepsilon}{2M_1}+M_2\cdot\frac{\varepsilon}{2M_2}=\varepsilon,\end{aligned}$$

故$f(x)\in\mathscr{H}^*$.

1.6.3 使函数连续且一致连续的点集的性质

我们知道，若E是实数集$\mathbb{R}$的有界闭集(即为紧集)，则E上的连续函数必定是一致连续的．其逆不真，例如，$f(x)\equiv1$在$\mathbb{R}$上是一致连续的，但$\mathbb{R}$不是紧集.

下面，我们研究使连续函数必为一致连续的集合的性质．为此，先引入下面的定义．

定义 2 设E是实数集$\mathbb{R}$的子集，若E上每个实值连续函数都是一致连续的，则称E为一致连续点集，简称 UC 集．

定理 8 每个 UC. 集必为闭集．

证 设E是一个 UC 集，若E不闭，则存在E的聚点c，使$c\notin E$. 不失一般性，可设E中有点列$\{a_n\}$，使$a_n<a_{n+1}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$. 在$E$上定义函数$f$如下：$f(a_{2n-1})=1$，$f(a_{2n})=0(n=1,2,\cdots)$；在$a_n$与$a_{n+1}$之间，$f(x)$的值为线性；而当$x>c$时$f(x)=1$，$x<a_1$时$f(x)=1$. 易见，$f$在$E$上连续，但并不一致连续．这与$E$是 UC 集的假设发生矛盾．因此，$E$必为闭集．

定义 3 设E为实数集$\mathbb{R}$的子集，若存在$\varepsilon>0$，使得对任何$x,y\in E$，$x\neq y$，恒有$|x-y|\geqslant\varepsilon$，则称$E$为一致孤立点集．

定理 9 若E可表示成$E=E_1\cup E_2$，其中E_1是紧集，而E_2是一致孤立点集，则E必为 UC 集．

证 令 $A=E_2\backslash E_1$，则 A 是一致孤立点集，从而是闭集．显然，$E=E_1\cup A$．设 f 在 E 上连续，由于 E_1 是紧集，A 是一个孤立点集，因而 f 在 E_1 与 A 上均是一致连续的．又因 A 是闭集，E_1 是紧集，且 A 与 E_1 不相交，故集 A 与 E_1 之间的距离大于 0，从而 f 在 $E_1\cup A$ 上也是一致连续的，即 f 在 E 上是一致连续的．因此，E 是 UC 集．

定理 10 每个 UC 集 E 可表成 $E=E_1\cup E_2$，其中 E_1 是紧集而 E_2 是一致孤立点集．

证 令

$$I_n=\{x\mid -n\leqslant x\leqslant n\},\quad n=1,2,\cdots,$$
$$E_+=\{x\in E\mid x\geqslant 0\},$$
$$E_-=\{x\in E\mid x\leqslant 0\}.$$

则可证存在 n'，使得 $E_+\backslash I_{n'}$ 是一致孤立点集．事实上，假如不存在 n，使 $E_+\backslash I_n$ 是一致孤立点集，我们就可以取出 E 中的点列 $\{a_n\}$，使 $a_n<a_{n+1}$，$a_{2n}-a_{2n-1}<1/n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$．于是，类似于定理 8，我们可以在 E 上构造一个连续函数，它在 E 上并不一致连续，这与 E 是 UC 集的假设发生矛盾．

类似地，存在 n''，使 $E_-\backslash I_{n''}$ 是一致孤立点集．

令 $n>\max\{n',n''\}$．由定理 8 知 E 是闭集，故 $E\cap I_n$ 是有界闭集，即为紧集．又，前面已证，$E\backslash I_n$ 是一致孤立点集．显然，$E=(E\cap I_n)\cup(E\backslash I_n)$．于是，定理 10 得证．

定理 11 UC 集的闭子集仍是 UC 集．

证 设 A 是 UC 集 E 的闭子集．据定理 10，E 可表成 $E=E_1\cup E_2$，其中 E_1 是紧集而 E_2 是一致孤立点集．显然，$A=(A\cap E_1)\cup(A\cap E_2)$．因 E_1 是紧集而 A 是闭集，故 $A\cap E_1$ 是紧集；又，E_2 是一致孤立点集，故 $A\cap E_2$ 是一致孤立点集．据定理 9，A 是 UC 集．

推论 2 任意个 UC 集之交是 UC 集．

证 由定理 8 和定理 11 即得．

1.6.4 评注

闭区间上的连续函数必是一致连续的，而非闭区间上的连续

函数未必是一致连续的．刘儒珍等在[15]中介绍了区间 I 上连续函数为一致连续的充要条件，即本节的定理 1．这不但解决了一致连续定义中“公共 δ ”的求取问题，而且也提供了判别函数一致连续的一个易于掌握的方法．

Paine[157]和殷建红[85]分别介绍了函数 f 在区间 I 上一致连续的两个充要条件，即本节的定理 2 和定理 3．袁朗轩[87]也探讨了函数一致连续的等价定义及应用．李文亮[30]探讨了函数在无穷正向上的一致连续性的判定．刘士强[11]介绍了一个非一致连续的充要条件．定理 1 与[11]的结果实质上是等价的．

Elyash 等在文献[118]中研究了定义在无界区间上的两个一致连续函数之积仍为一致连续的条件，并得到了本节的定理 7．Levine[145]研究了使连续函数为一致连续的集合的性质，即本节的定理 8 至定理 11．

§1.7 在每个区间上有一个真正局部极大值的函数

称从实数集$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$的函数 f 在点 $x\in\mathbb{R}$ 有一个真正局部极大值，是指存在 $\delta>0$，对所有满足 $0<|y-x|<\delta$ 的 $y\in\mathbb{R}$，都有 $f(y)<f(x)$．

本节，我们考虑下述问题：是否存在$\mathbb{R}$上的一个函数，它在每个区间上都能取到一个真正的局部极大值？这个问题的答案是肯定的．下面，我们介绍两个例子．

例 1 设$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$是$\mathbb{R}$中的稠密集，$g(x)=1-\min\{1,x\}$，$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$，这里 $g_n(x)=A_ng((x-r_n)/w_n)$，而正实数 A_n 和 w_n 待定．

我们对 n 归纳地定义 g_n．显然，当 $|x-r_n|>w_n$ 时，$g_n(x)=0$．令 $I_n=\{x\mid|x-r_n|\leqslant w_n\}$，并称 I_n 为 g_n 的伴随区间．我们还定义

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{n}g_j(x)\ .$$

一般，我们要求：① $0<A_n<2^{-n}$；② I_n 的端点异于所有的点 r_j $(j=1,2,\cdots)$；③若 $j<n$，则不是③′：$r_n\notin I_j$ 且 w_n 取得使 I_n 和 I_j 不相交，就是③″：$r_n\in I_j$ 且 w_n 取得使 I_n 严格地位于 I_j 中 r_n 属于的那一半．例如，若 $r_j-w_j<r_n<r_j$，则

$$r_j-w_j<r_n-w_n<r_n+w_n<r_j.$$

归纳地取正数 A_n 和 w_n，使①，②和③都成立．显然，由①知 f 的定义合理，而且不管常数 w_n 如何选取，它总连续．以后，我们将改变某些 A_n 和 w_n，但总认为条件①，②和③继续成立．对选取 A_n 和 w_n 的这些条件①，②和③将不在构造的每一步中重复写出．

设 A_1 和 w_1 按上述要求选取，这样定义了 f_1．作为“三角形”函数 g_n 的和；f_n 将取作适合条件：

(a) f_n 在 r_n 有一个真正局部极大值，并且在区间 (r_n-w_n,r_n) 上为线性单增，在区间 (r_n,r_n+w_n) 上为线性单减．

(b) 若 $I_n\subset I_j$ 且 $I_n\neq I_j$，则 $j<n$，并且 $f_n(r_n)<f_j(r_j)$．

设 f_{n-1} 已经取好，且适合上面的条件(a)和(b)．若 I_n 在 I_j 的外部，这里 $j=1,2,\cdots,n-1$，则 A_n 和 w_n 不再改变，而(a)和(b)对 f_n 也成立．否则，设 h 为不超过 $n-1$ 的最大整数，使 $r_n\in I_h$．于是按前面所加的限制，I_n 或者严格地在区间 $(r_h,-w_h,r_h)$ 内，或者严格地在区间 (r_h,r_h+w_h) 内，从而 f_h 在 I_n 上是线性的．由(a)，$f_h(r_n-w_n)$ 和 $f_h(r_n+w_n)$ 都小于 $f_h(r_h)$，所以 A_n 可以取得足够小，以使 $f_n(r_n)<f_h(r_h)$．若 $r_h\in I_j$，这里 $j<h$，则 $I_h\subset I_j$，由(b)，$f_h(r_h)<f_j(r_j)$．于是 $f_n(r_n)<f_j(r_j)$，即对 n 条件(b)也成立．固定 A_n，我们可以减小 w_n，直到条件(a)满足．实际上，g_j 的最大和最小斜率为 $\pm A_j/w_j$，因此只要 $A_n/w_n>\sum_{j=1}^{n-1}A_j/w_j$，就可以保证条件(a)成立．因此，归纳法完成．而且条件①，②，③和(a)，(b)都成立．

这样定义的函数 f，在每个点 r_n 处有一个真正局部极大值．其实，设 $x\in I_n$ 且 $x\neq r_n$，则可证 $f(x)<f(r_n)$．若 $x\notin I_j$，$j=n+1,n+2,\cdots$，则由条件(a)，$f(x)=f_n(x)<f_n(r_n)\leqslant f(r_n)$．现在设 h 是超过 n 的最小下标，使 $x\in I_h$．如果存在一个超过 n 的最大下标 k，

使 $x\in I_k$ 成立，则由条件(a)和(b)，有

$$f(x)=f_k(x)<f_k(r_k)<f_n(r_n)\leqslant f(r_n)\ .$$

如果这种 k 不存在，则

$$f(x)=\lim_{i\to\infty}f_{k_i}(x),$$

其中 $x\in I_{k_i}$，$i=1,2,\cdots$，且所有的 $k_i>h$. 于是 $f_{k_i}(x)<f_{k_i}(r_{k_i})<f_h(r_h)<f_n(r_n)$，因此 $f(x)\leqslant f_h(r_h)<f_n(r_n)$.

例 2 在例 1 中，我们构造了一个连续函数，这个函数在一个稠密子集的每一点上取得真正局部极大值．这就使人们联想到，可否像无处可微的连续函数的情形一样，具有真正局部极大稠密集的连续函数，其存在性用 Baire 纲的方法来证明？更精确地说，令 $C[0,1]$ 代表定义在 $[0,1]$ 上的连续实值函数空间，距离为

$$d(f,g)=\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|\ ,$$

则 $C[0,1]$ 是一个完备的度量空间. 令 D 为空间 $C[0,1]$ 的子集，它是由那些具有在 $[0,1]$ 中稠密的真正局部极大集的函数组成. 那么 D 是否为非空集？

度量空间的子集称为是残留的，是指其补集为第一纲集. Baire 纲定理是说，在完备的度量空间中空集不是残留集．

下面，我们给出一个 D 为 $C[0,1]$ 的残留集的直接证明，从而由 Baire 纲定理得到 D 是非空集．此外，还将证明 D 为 $C[0,1]$ 中的 Borel 集．

先引进一些符号．I 表示 $[0,1]$ 的闭子区间，I^0 表示 I 的内点集，$|I|$ 表示 I 的长度．有理区间是指以有理数为端点的区间．对任意给定的区间 $I\subset[0,1]$，定义

$$A(I)=\{f\in C[0,1]|\ \text{存在}\ x\in I^0,\text{使得对所有}\ y\in I\backslash\{x\},\ f(y)<f(x)\}\ .$$

设 $J\subset I^0$，并令

$$B(I,J)=\{f\in C[0,1]|\ \sup_{x\in J}f(x)>\sup_{x\in I\backslash J^0}f(x)\}.$$

定理 1 D 是 $C[0,1]$ 的残留 Borel 集．

证 先证对每个区间 I，集 $A(I)$ 在 $C[0,1]$ 中稠密．令 $f\in$

$C[0,1]$，$\varepsilon>0$，$z=\sup\limits_{y\in I}f(y)$. 选取非空开区间 $J\subset I$，使得对所有 $x\in J$，都有 $f(x)>z-\varepsilon$. 再定义一个 $g\in C[0,1]$，使得在 J 的中点，g 等于 $z+\varepsilon$，而在两端点等于 f；g 在 J 上的图象由连接上面定义的三点的两条直线段构成；而在 $I\setminus J$ 上，g 等于 f. 显然，$g\in A(I)$ 且 $d(f,g)\leqslant 2\varepsilon$. 因此，$A(I)$ 在 $C[0,1]$ 中稠密.

次证 $A(I)$ 是 G_δ 集. 对每个 $J\subset I^0\subset[0,1]$，$B(I,J)$ 是开集. 事实上，若 $f\in B(I,J)$，则以 f 为中心，以 $(\sup\limits_{x\in J}f(x)-\sup\limits_{x\in I\setminus J^0}f(x))/3$ 为半径的开球完全包含在 $B(I,J)$ 中.

我们将证明，对每个 $I\subset[0,1]$，有

$$A(I)=\bigcap_{i=1}^{\infty}\{\bigcup B(I,J)\mid J\text{ 为闭区间，}J\subset I^0,|J|<\frac{1}{i}\}. \tag{1}$$

设 f 属于(1)的右端，它表明对每个 $i=1,2,\cdots$ 存在闭区间 J_i，使得 $f\in B(I,J_i)$，$|J_i|<1/i$. 由 $B(I,J)$ 的定义可知，$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}J_i$ 包含了使 f 在 I 上达到极大值的所有点. 因为 $|J_i|\to 0$，故 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}J_i$ 仅含有一个点 x. 又因每个 $J_i\subset I^0$，故有 $x\in I^0$ 且 f 在 x 也只在 x 点达到它在 I 上的极大值. 因此，$f\in A(I)$. 相反方向的证明是显然的

于是，$A(I)$ 是 $C[0,1]$ 的稠密 G_δ 子集，所以是残留集. 因此，集

$$X=\bigcap\{A(I)\mid I\subset[0,1],I\text{ 为有理区间}\}$$

也是残留集. 显然，$X\subset D$，所以 D 也是残留集. 又因

$$D=\bigcap_{T\subset[0,1],T\text{为有理区间}}\ \bigcup\{A(I)\mid I\subset T,\ I\text{ 为有理区间}\},$$

故 D 是一个 Borel 集.

注 1 如果我们定义一个由具有真正极小的稠密集的函数所组成的集合 E，则由类似的论证可知 E 也是残留集. 从而由那些在[0,1]中既具有真正极大又具有真正极小稠密集的函数组成的

集合 $D\cap E$ 也是残留集，因而是非空集．若是沿袭本节例 1 中的路线去构造一个有此性质的函数 f，将会相当复杂．

注 2 本节的两个例子分别是由 Posey 和 Vaugnan[161]以及 Drobot 和 Morayne[189]作出的．

注 3 Katznelson 和 Stromberg[138]作出了一个可微的非常值函数，它在每个非空区间内都能取得局部极大值和局部极小值。

第二章　微　分

§2.1　导读

本章围绕导数、连续可微性、微分学基本定理、导数介值定理的证明、微分中值定理等微分学的基本内容介绍微分学的基本理论.

在§2.2中讨论微分学基本定理及其推广形式,并给出微分学基本定理的一个初等证明,这个证明与现行的数学分析教科书中给出的不同.在§2.3中给出对称导数的定义;讨论对称导数与通常导数、导数与非中心差商的关系,以及对称导数的基本理论;并就对称导数建立相应的Rolle定理和广义微分中值定理.在§2.4中,介绍可微且单调有界函数中的一个反例,以及关于连续函数严格单调的几个充分条件,并提供导数几乎处处为零的严格单调的连续函数例子.在§2.5中给出函数的一致可微性定义、连续可微性与一致可微性的等价定理、一致可微性的进一步特征;还介绍处处连续而无处可微函数的例子,主要是Van der Waerden函数及其推广;最后给出稠密集上函数不连续的一个定理.§2.6中叙述导数介值定理,并介绍导数介值定理的四种证明方法.§2.7是微分中值定理及其推广,主要有:Rolle定理的两个证明(这两个证明都与现行教科书中给出的不同);证明微分中值定理中构造辅助函数的四种方法:分析法、试验法、待定系数法和几何法;微分中值定理的推广.§2.8中讨论复值函数不定式的定值问题,给出相应的L'Hospital法则.本章最后一节介绍凸函数的几个等价定义,并利用对称函数的极值性质给出Jensen不等式的一个新证明.

§2.2 微分学基本定理

2.2.1 微分学基本定理的初等证明

定理 1(微分学基本定理) 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上可微. 若对每一 $x\in[a,b]$, $f'(x)=0$, 则 f 必为常值函数.

证 设 $f'(x)\equiv 0$ 而 f 不是常值函数, 则存在 $u,v\in[a,b]$, $u<v$, 使得 $f(u)\neq f(v)$. 于是, 连接 $(u,f(u))$ 与 $(v,f(v))$ 的弦有异于零的斜率. 因此

$$f(v)-f(u)=c(v-u) \text{ 或 } \Delta f=c\Delta x(c\neq 0). \tag{1}$$

现在把区间 $[u,v]$ 二等分, 并设分点为 w. 若

$$f(v)-f(w)<c(v-w),\ f(w)-f(u)<c(w-u),$$

则 $f(v)-f(u)<c(v-u)$. 这与(1)矛盾. 因此, $[u,w]$ 中或 $[w,v]$ 中至少有一个使 $\Delta f/\Delta x\geqslant c$, 记此区间为 $[u_1,v_1]$. 仿照上述程序, 我们可以作出闭区间列 $\{[u_n,v_n]\}$, 使 $[u_{n+1},v_{n+1}]\subset[u_n,v_n]$, $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n-u_n)=0$, 且在这些区间上都有 $\Delta f/\Delta x\geqslant c$. 据闭区间套定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}v_n=x\in[u,v].$$

因此, 若 $c>0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)>0,$$

这与 $f'(x)=0$ 矛盾. 同理可证 $c<0$ 不成立. 故 $c=0$, 从而 $f(u)=f(v)$, 但这又与反证法的假设矛盾.

注 1 同样可证, 若在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\geqslant 0$, 则当 $v>u$ 时 $f(v)\geqslant f(u)$; 若 $f'(x)\leqslant 0$, 则当 $v>u$ 时 $f(v)\leqslant f(u)$.

注 2 在微分学基本定理的证明中, 只要分别把 $c>0$ 代以 $c>m$ 以及 $c<0$ 代以 $c<M$, 即可得到下面的推广: 若 $m\leqslant f'(x)\leqslant M$ $(a\leqslant x\leqslant b)$, 则

$$m(v-u)\leqslant f(v)-f(u)\leqslant M(v-u),$$

其中 m 与 M 是常数.

2.2.2 微分学基本定理的推广

关于微分学基本定理,我们有如下的推广形式:

定理 2 设函数 f 在区间 I 上连续. 若对 I 的每个内点 x,都有 $f_+(x)=0$,则 f 在 I 上是常值函数,其中 $f_+(x)$ 代表 f 在点 x 的右导数,即

$$f_+(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

先证明下面的引理.

引理 1 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)=f(b)=0$,f_+ 在开区间 (a,b) 内处处存在,则存在 $c\in(a,b)$,使得 $f_+(c)\leqslant 0$.

证 若 f 是常值函数,则引理 1 的结论是显然的. 若 f 不是常值函数,则 f 在 $[a,b]$ 上或者有正的最大值,或者有负的最小值. 现分别加以讨论:

(i) 若 f 在某点 $c\in[a,b]$ 取得正的最大值,则因 $f(a)=f(b)=0$,故 $c\in(a,b)$,从而对大于 c 而又充分靠近 c 的 x,有

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqslant 0.$$

令 $x\to c^+$,便得 $f_+(c)\leqslant 0$.

(ii) 若 f 在某点 $q\in[a,b]$ 取得负的最小值,则 $q\in(a,b)$. 若对任意的 $x\in(a,q)$,恒有 $f'_+(x)\leqslant 0$,则引理 1 的结论成立. 若存在 $p\in(a,q)$ 使得 $f'_+(p)>0$,则对大于 p 而又充分接近 p 的一切 x,均有

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p}>0,$$

从而 $f(x)>f(p)$. 令 M 是 f 在闭区间 $[p,q]$ 上的最大值,则 $M>f(p)\geqslant f(q)$. 显然,f 的最大值 M 只能在某点 $c\in(p,q)$ 取到. 由(i)的证明知 $f'_+(c)\leqslant 0$.

引理 2 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,$f(a)=f(b)=0$,而 f'_+ 在开区间 (a,b) 内处处存在,则有 $d\in(a,b)$,使得 $f'_+(d)\geqslant 0$.

证 应用引理 1 于 $-f$ 即可.

推论 1 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，f'_+ 在开区间 (a,b) 内处处存在，则有 $c,d\in(a,b)$，使得

$$f'_+(c)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(d).$$

证 应用引理 1 与引理 2 于函数

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

即可.

定理 2 的证明 在 I 内任取 $a,b,a<b$，并在区间 $[a,b]$ 上对函数 f 应用上面的推论. 由于对每个 $x\in(a,b)$，都有 $f'_+(x)=0$，故由推论 1 知 $f(a)=f(b)$，所以 f 是 I 上的常值函数.

注 3 上述证法选自文献[142]. 利用上述引理，我们还可得到推广的微分中值定理的减弱形式，并把 Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理相应的减弱形式作为特例. 我们列出其结果，关于证明，读者可参看文献[59].

定理 3 设函数 f,g 和 h 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内存在右导数 f'_+,g'_+ 和 h'_+，则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}g(a)&h(a)\\g(b)&h(b)\end{vmatrix}f'_+(\xi)+\begin{vmatrix}h(a)&f(a)\\h(b)&f(b)\end{vmatrix}g'_+(\xi)\\&+\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f(b)&g(b)\end{vmatrix}h'_+(\xi)\leqslant 0,\\&\begin{vmatrix}g(a)&h(a)\\g(b)&h(b)\end{vmatrix}f'_+(\eta)+\begin{vmatrix}h(a)&f(a)\\h(b)&f(b)\end{vmatrix}g'_+(\eta)\\&+\begin{vmatrix}f(a)&g(a)\\f(b)&g(b)\end{vmatrix}h'_+(\eta)\geqslant 0.\end{aligned}$$

作为特例，有

推论 2 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内有右导数，则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$f'_+(\eta)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f'_+(\xi).$$

推论 3 设函数 f,g 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内存在右导数 f'_+,g'_+，且对任意 $x\in(a,b)$，$g'_+(x)\neq 0$，又 $g(a)\neq g(b)$，则存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'_+(\eta)}{g'_+(\eta)}\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\leqslant\frac{f'_+(\xi)}{g'_+(\xi)}.$$

注 4 上述结果中的右导数换成左导数后，结论同样成立.

§2.3 对称导数

定义 1 设函数 f 是定义在开区间 J 上的函数，$[a,b]$是 J 的闭子区间，$x\in[a,b]$；若极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

存在，则称此极限为 f 在点 x 的对称导数，记作 $f^s(x)$. 若 $0\in(a,b)$，则称 $f^s(0)$为中心差商极限.

如果导数 $f'(x)$存在，则对称导数 $f^s(x)$亦存在，且 $f'(x)=f^s(x)$. 这个结论由等式

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{2h}+\frac{f(x)-f(x-h)}{2h}$$

即可得到. 但是，$f(x)$的连续性和 $f^s(x)$的存在性并不能保证 $f'(x)$的存在性. 例如，$f(x)=|x|$在 $x=0$ 处就是如此.

2.3.1 导数与非中心差商

众所周知，若函数 f 在原点的某邻域内有定义且在原点可微，则中心差商极限存在，且 $f^s(0)=f'(0)$，其逆不真. 我们自然要问：若函数 f 在 $x=0$ 的非中心差商收敛，例如，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-2h)}{3h}$$

存在，能否推出 f 在 $x=0$ 可微？

定理 1 设函数 f 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义，且在 $x=0$ 连续，$a\neq\pm1$. 若

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(ah)}{(1-a)h}=L,$$

其中 L 为常数，则 f 在 $x=0$ 可微.

证 令 $D(a,h)=[f(h)-f(ah)]/(1-a)h$. 我们只要就 $0<a<1$，$L=0$ 的情形加以证明即可. 理由如下：① 若 $L\neq0$，我们可考虑函数 $g(x)=f(x)-Lx$；② 若 $a=0$，这正是 f 在 $x=0$ 的导数的定义；③ 若 $a>1$，我们可以取 h/a 作为起点：

$$\lim_{h\to0}D(a,h/a)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(h/a)}{(1-a^{-1})h},$$

新常数 a 即是原来的 $1/a$；④ 若 $a<0$，我们就考虑 $D(a^2,h)$，这是因为

$$D(a^2,h)=\frac{D(a,h)}{1+a}+\frac{aD(a,ah)}{1+a}.$$

总之，我们可以假定 $L=0$ 且 $0<a<1$. 注意到

$$\sum_{i=0}^{n-1}a^iD(a,a^ih)=\frac{f(h)-f(a^nh)}{(1-a)h},$$

于是由定理 1 的条件可知，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|h|<\delta$ 时，就有 $|D(a,h)|<\varepsilon$. 因此，当 $0<|h|<\delta$ 时，对任何 $i\geqslant0$，均有

$$|D(a,a^ih)|<\varepsilon.$$

由此可知，当 $0<|h|<\delta$ 时，对任何 $n\geqslant1$，有

$$\left|\frac{f(h)-f(a^nh)}{(1-a)h}\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}a^i|D(a,a^ih)|$$

$$<\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}a^i=\frac{\varepsilon(1-a^n)}{1-a}.$$

于是得到

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right|\leqslant\left|\frac{f(h)-f(a^nh)}{h}\right|+\left|\frac{f(a^nh)-f(0)}{h}\right|$$

$$<\varepsilon+\left|\frac{f(a^nh)-f(0)}{h}\right|.$$

因 f 在 $x=0$ 连续，且 $0<a<1$，故可选取 n 充分大，使

$$|f(a^n h) - f(0)| < \varepsilon |h| .$$

于是，当 $0<|h|<\delta$ 时，就有

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| < 2\varepsilon ,$$

即 f 在 $x=0$ 可微.

2.3.2 对称导数的基本理论

Aull[102]指出，关于对称导数，有类似于通常导数的一些基本性质.

引理 1 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，f^s 在开区间 (a,b) 内存在，且 $f(b)>f(a)$（或 $f(b)<f(a)$），则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f^s(c)\geqslant 0$，（或 $f^s(c)\leqslant 0$）.

证 取 k 使 $f(a)<k<f(b)$，令

$$A = \{x | f(x) > k \ , \ a < x < b\} ,$$

并记 $c=\inf A$. 因 f 在 $[a,b]$ 上连续，故 $c\neq a, c\neq b$. 此外，在 c 的每个邻域内存在 $x>c$，使 $f(x)>k$，而当 $a\leqslant x\leqslant c$ 时，$f(x)\leqslant k$. 于是，由对称导数的定义即知 $f^s(c)\geqslant 0$. 同理可证，当 $f(b)<f(a)$ 时，存在 $c\in(a,b)$，使得 $f^s(c)\leqslant 0$. 引理得证.

因在引理 1 的证明中，实数 $k(f(a)<k<f(b))$ 是任取的，故得下面的引理.

引理 2 设函数 f 满足引理 1 的条件，则当 $f(a)<f(b)$ 时，存在不可数个 $c\in(a,b)$，使得 $f^s(c)\geqslant 0$，而当 $f(a)>f(b)$ 时，存在不可数个 $c\in(a,b)$，使得 $f^s(c)\leqslant 0$.

引理 3（广义 Rolle 定理） 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，f^s 在开区间 (a,b) 内存在，且 $f(a)=f(b)=0$，则存在 $x_1\in(a,b)$ 使得 $f^s(x_1)\geqslant 0$，还存在 $x_2\in(a,b)$ 使得 $f^s(x_2)\leqslant 0$.

证 若 $f\equiv 0$，则引理 3 的结论成立. 若 $f\neq 0$，则存在 c 使 $f(c)>0$，或存在 d 使 $f(d)<0$，或二者均成立. 据引理 1，存在 x_1 及 x_2，$a<x_1<c<x_2<b$ 或 $a<x_2<d<x_1<b$，使得 $f^s(x_1)\geqslant 0$ 且

$f^s(x_2)\leqslant 0$.

定理 2(广义微分中值定理) 设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续,f^s 在开区间(a,b)内存在,则存在 $x_1\in(a,b)$,$x_2\in(a,b)$使得

$$f^s(x_2)\leqslant\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant f^s(x_1)\ .$$

证 作函数

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\ ,$$

对函数 g 应用引理 3 即可.

定理 3 设函数 f 与 f^s 在开区间(a,b)内连续,则 f'在(a,b)内存在,且 $f'=f^s$.

证 取 h 充分小,使 $a<x+h<b$. 据定理 2,存在 x_1,x_2,它们严格地位于 x 与 $x+h$ 之间,使得

$$f^s(x_2)\leqslant\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leqslant f^s(x_1)\ . \tag{1}$$

若不等式(1)中严格不等号成立,则由连续函数的介值定理及 f^s 的连续性可知

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

存在,且 $f'(x)=f^s(x)$. 若是其它情形,则存在 x_3 严格位于 x 与 $x+h$ 之间,使得

$$f^s(x_3)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ .$$

令 $h\to 0$,即得 $f^s(x)=f'(x)$. 证毕.

如所周知,若 f'在区间(a,b)上有界,则 f 满足 Lipschitz 条件. 这一重要结论可以推广到对称导数的情形.

定理 4 若 f^s 在区间(a,b)上有界,f 在(a,b)连续,则 f 在(a,b)上满足 Lipschitz 条件,即存在常数 M,使得对任意 $x,t\in(a,b)$,恒有

$$|f(x)-f(t)|\leqslant M|x-t|\ .$$

证 因 f^s 在(a,b)上有界,故存在 $M>0$,使得对一切 $x\in(a,$

$b)$，恒有$|f^s(x)|\leqslant M$. 于是由定理 2 知，对任意 $x,t\in(a,b)$，有

$$-M\leqslant\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\leqslant M,$$

从而$|f(x)-f(t)|\leqslant M|x-t|$.

2.3.3 评注

对称导数又称为 Schwarz 导数，它严格弱于通常的导数，即若函数 f 可导，则 f 是对称可导的，反之则不成立. 定理 3 告诉我们，若连续函数 f 的对称导(函)数 f^s 在(a,b)内连续，则在该区间内对称导数即为导数. 尽管对称导数严格弱于通常的导数，但对称导数仍然具有通常导数的一些基本性质. 我们还可以对它建立广义 Rolle 定理和广义微分中值定理.

关于非中心差商收敛与导数存在的关系问题，我们选了 Eggermont 的结果[117]，即本节的定理 1. 沿用定理 1 考虑问题的同样思路，我们提出下面的问题，供读者思考.

问题 设函数 f 在 $x=0$ 的某个邻域内有定义，且在 $x=0$ 连续，那么，函数 g 满足什么条件可以由极限

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f[g(h)]}{h-g(h)}=L$$

的存在性推出 f 在 $x=0$ 的可微性?

§2.4 导数与单调性

2.4.1 可微且单调有界函数中的一个反例

在函数作图的教学中，常碰到学生提出这样一个问题：如果函数 f 在区间$(-\infty,+\infty)$上可微且单调有界，那么，从 f 的图象来看，是否有$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=0$?

应当指出，这个问题的答案是否定的. 我们介绍 Moran[151]的例子如下：

对非负整数 n，令 $f(n)=1-2^{-n}$. 然后按下列方式把 f 的定义域扩张到全体非负实数上：对每一非负整数 n，在区间 $[n,n+1]$ 上，函数 f 与 f_n 相一致. 这里，f_n 是 $[n,n+1]$ 上的任一单调可微函数，且适合

$$f_n(n)=f(n)\ ,\ f_n(n+1)=f(n+1)\ ,$$

$$f_n(n+\frac{1}{2})=[f(n)+f(n+1)]/2\ ,$$

$$f'_n(n)=f'_n(n+1)=0\ ,\ f'_n(n+\frac{1}{2})=1\ .$$

例如，在每个区间 $[n,n+1]$ 上，可以适当选择两个椭圆的弧段作为函数 f_n 的图象，可使 f_n 满足上面提到的全部条件.

其次，令 $f(-x)=-f(x)$，则 f 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界可微函数，显然，f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)\neq 0$. 其实，这个极限根本不存在，因为 $f'(x)$ 在每个单位闭区间上，恒能达到 0 和 1.

2.4.2 关于连续函数严格单调的充分条件

在数学分析中，通常假设函数在区间上有有限导数，并依据导数的符号判定函数的严格单调性. 这里，我们介绍两个适用范围较广的函数严格单调的充分条件.

定理 1 设函数 f 在区间 I 上连续，在 I 内部 $f'(x)\geqslant 0$（在某些点允许 $f'(x)=+\infty$），且 I 中使 $f'(x)=0$ 的点集不含非空开区间，则 f 在 I 上严格单调.

证 因 f 在 I 上连续，在 I 内部 $f'(x)\geqslant 0$（在某些点允许 $f'(x)=+\infty$），故对 $x_1,x_2\in I$，$x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\ . \tag{1}$$

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则由(1)式，对任意 $x\in(x_1,x_2)$，有 $f(x)=f(x_1)$，从而 $f'(x)\equiv 0$，$x\in(x_1,x_2)$，矛盾. 因此，$f(x_1)<f(x_2)$.

引理 1 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，除有限个或可数个点（包括端点 a,b）所成之集 E 外，都有 $f'(x)>0$（包括 $f'(x)=$

$+\infty)$，则 $f(a)\leqslant f(b)$.

证 对于 $x_0\in(a,b)$，若 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，有 $f(x)>f(x_0)$. 令

$$F=\{x\mid x\in(a,b),\text{存在}\xi\in(a,b],\text{使}f(x)<f(\xi)\},$$

则 $[a,b]\backslash E\subset F$.

下证 $f(a)\leqslant f(b)$. 若 $f(a)>f(b)$，由 f 的连续性可知，对任意 $y_0\in[f(b),f(a)]$，存在 $x\in[a,b]$，使 $f(x)=y_0$. 令

$$x_0=\sup\{x\mid f(x)=y_0,x\in[a,b]\},$$

由 f 的连续性可知 $f(x_0)=y_0$. 依 x_0 的定义及连续函数介值定理知 $x_0\notin F$，从而 $x_0\in E$.

设一切 x_0 所成之集为 G，则 $G\subset E$. 这样，$y_0\to x_0$ 是 $[f(b),f(a)]$ 到 G 上的一个对应，且显然是一对一的. 而 G 至多是可数集，不可能与 $[f(b),f(a)]$ 构成一一对应，矛盾. 故 $f(a)\leqslant f(b)$.

定理 2 在引理 1 所给条件下，函数 f 在区间 $[a,b]$ 上严格单调.

证 由引理 1 知 f 在 $[a,b]$ 上单增，即对任意 $x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

若 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $f(x)\equiv f(x_1)$，$x\in[x_1,x_2]$，从而在 (x_1,x_2) 内有 $f'(x)\equiv 0$，矛盾.

注 1 定理 1 与定理 2 选自文献[6].

定理 2 可以推广到任意区间的情形.

文献[5]还指出，定理 2 要求函数在区间上导数不存在的点至多为可数个. 若导数不存在的点为零测度集，则结论不成立.

2.4.3 导数几乎处处为零的严格单调的连续函数

Gerald[125]用简单的方法构造了一个导数几乎处处为零的严格单调的连续函数. 他的构造法如下：设 g 是区间 $[0,1]$ 上的 Cantor 函数，即在开区间 $[1/3,2/3]$ 上，$g(x)=1/2$；在 $(1/9,2/9)$ 上，$g(x)=1/4$；而在 $(7/9,8/9)$ 上，$g(x)=3/4$；如此继续下去. 然

后，把 g 连续地延拓到区间$[0,1]$上，此外，当 $x<0$ 时，令 $g(x)=0$；当 $x>1$ 时，令 $g(x)=1$. 易见，g 是$(-\infty,+\infty)$上的单增的连续函数，且 $g'(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$上几乎处处成立. 令

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

是实数轴上的任一可数稠密子集，并令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}g[2^n(x-a_n)].$$

兹证，f 在$(-\infty,+\infty)$上连续、严格单调且导数几乎处处为零.

事实上，定义函数 f 的级数在$(-\infty,+\infty)$上是一致收敛的. 因此，f 在$(-\infty,+\infty)$上连续. 若 $x_2<x_1$，取 a_n 使 $x_2<a_n<x_1$，则

$$g[2^n(x_1-a_n)]>0=g[2^n(x_2-a_n)],$$

且

$$g[2^m(x_1-a_m)]\geqslant g[2^m(x_2-a_m)]\ (m\neq n).$$

因此，$f(x_1)>f(x_2)$，即 f 在$(-\infty,+\infty)$上是严格单增的. 最后，据函数项级数的 Fubini 定理，在$(-\infty,+\infty)$上几乎处处有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g'[2^n(x-a_n)]=0.$$

注 2 刘文在[12]与[13]中用比较一般的方法构造了一类导数几乎处处为零的严格单调的连续函数，读者如有兴趣可参看作者的原文.

§2.5 连续性、可微性与一致可微性

我们知道，可微函数的导函数未必连续. 例如，令

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin x^{-1}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 f 在$(-\infty,+\infty)$上可微，但 f' 在 $x=0$ 并不连续. 那么，在什么条件下，可微函数的导函数是连续的呢？这个问题与函数的一致可微性有关.

2.5.1 导函数的连续性

为了讨论导函数的连续性，即函数的连续可微性，我们先给出一致可微的定义.

定义 1 设函数 f 在区间 I 上可微. 若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $t,x\in I$ 且 $0<|t-x|<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|<\varepsilon,$$

则称 f 在 I 上一致可微.

定理 1 设 $[a,b]$ 是开区间 J 的闭子区间，函数 f 在 J 上可微，则 f' 在 $[a,b]$ 上连续的充要条件是 f 在 $[a,b]$ 上一致可微.

证 充分性. 任取非零数列 $\{h_n\}$，使对任意的 $x\in[a,b]$，均有 $x+h_n\in J$，且 $h_n\to 0(n\to\infty)$. 据定理 1 的假设，连续函数列 $\{[f(x+h_n)-f(x)]/h_n\}$ 在 $[a,b]$ 上关于 x 一致收敛于 $f'(x)$，故 f' 在 $[a,b]$ 上连续.

必要性. 由微分中值定理，对每个 $x\in[a,b]$ 和 $x+h\in J$，均有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=f'(x+\theta h)-f'(x),\quad(1)$$

其中 $0<\theta<1$. 据假设，f' 在 $[a,b]$ 上连续从而一致连续. 因此，对任意的 $\varepsilon>0$，存在不依赖于 x 的 $\delta>0$，当 $0<|\theta h|<\delta$ 时，有

$$|f'(x+\theta h)-f'(x)|<\varepsilon.\quad(2)$$

于是，当 $0<|h|<\delta$ 时，(2)式也成立. 由(1)与(2)便知函数 f 在 $[a,b]$ 上一致可微.

注 1 Mukhopadhyay[153]指出，定理 1 中的导数代以对称导数时，其结论仍然成立.

2.5.2 函数一致可微的特征

从上节的讨论我们知道，函数的一致可微性给我们提供了一条研究导函数的连续性的途径. 下面，我们进一步讨论一致可微

性的特征.

定理 2 函数 f 在区间 I 上一致可微的充要条件是对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $t_1,t_2,x\in I$ 且 $0<|t_1-x|<\delta,0<|t_2-x|<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{f(t_1)-f(x)}{t_1-x}-\frac{f(t_2)-f(x)}{t_2-x}\right|<\varepsilon.$$

证 必要性. 设函数 f 在 I 上一致可微,即对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $t,x\in I$ 且 $0<|t-x|<\delta$ 时,便有

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,当 $t_1,t_2,x\in I$ 且 $0<|t_1-x|<\delta,0<|t_2-x|<\delta$ 时,便有

$$\left|\frac{f(t_1)-f(x)}{t_1-x}-\frac{f(t_2)-f(x)}{t_2-x}\right|\leqslant\left|\frac{f(t_1)-f(x)}{t_1-x}-f'(x)\right|$$
$$+\left|\frac{f(t_2)-f(x)}{t_2-x}-f'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

充分性. 设条件满足,我们来证明 f 在 I 上一致可微. 对任意 $x\in I$,令

$$\varphi(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$

由函数极限的 Cauchy 收敛准则知,极限

$$f'(x)=\lim_{t\to x}\varphi(t)=\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

存在,于是在不等式

$$\left|\frac{f(t_1)-f(x)}{t_1-x}-\frac{f(t_2)-f(x)}{t_2-x}\right|<\varepsilon.$$

中,令 $t_2\to x$,即得

$$\left|\frac{f(t_1)-f(x)}{t_1-x}-f'(x)\right|\leqslant\varepsilon.$$

依定义,f 在 I 上一致可微.

定理 3 函数 f 在区间 I 上一致可微的充要条件是 f' 在 I 上一致连续.

证 充分性. 设 f' 在 I 上一致连续,则对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>$

0，当 $t,x\in I$ 且 $|t-x|<\delta$ 时，就有

$$|f'(t)-f'(x)|<\varepsilon.$$

由微分中值定理，有

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}=f'(\xi),$$

ξ 在 t 与 x 之间，则 $|\xi-x|<|t-x|<\delta$，故有

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|=|f'(\xi)-f'(x)|<\varepsilon,$$

因此，f 在 I 上一致可微.

必要性. 任取 $x_1,x_2\in I$，则

$$\begin{aligned}|f'(x_1)-f'(x_2)|\leqslant&\left|f'(x_1)-\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}\right|\\&+\left|\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}-\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}\right|\\&+\left|\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}-f'(x_2)\right|.\end{aligned}\tag{3}$$

对任意 $\varepsilon>0$，由于 f 在 I 上一致可微，故存在 $\delta_1>0$，当 $t,x\in I$ 且 $0<|t-x|<\delta_1$ 时，有

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{4}$$

又由定理 1，存在 $\delta_2>0$，当 $t,x_1,x_2\in I$ 且 $0<|x_1-t|<\delta_2,0<|x_2-t|<\delta_2$ 时，有

$$\left|\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1}-\frac{f(t)-f(x_2)}{t-x_2}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{5}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则对任意 $x_1,x_2\in I$ 且当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，不妨设 $x_1\neq x_2$，我们在 x_1 与 x_2 之间任取一个 t，则有

$$0<|t-x_1|<|x_1-x_2|<\delta,0<|t-x_2|<|x_1-x_2|<\delta,$$

于是由(3)、(4)、(5)得

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

故 f' 在 I 上一致连续. 定理得证.

利用一致可微的定义，容易得到如下的定理.

定理 4 设函数 g 在区间 I 上一致可微，函数 f 在 I 上可微．又存在常数 $L>0$，使得对任意 $t,x\in I$，都有

$$\left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}-f'(x)\right|\leqslant L\left|\frac{g(t)-g(x)}{t-x}-g'(x)\right|,$$

则 f 在 I 上也一致可微．

2.5.3 处处连续而无处可微的函数

在区间[0,1]上连续而无处可微的函数，最早的例子是 Bolzano 于 1830 年左右提出的，但他的手稿在 1920 年才发现，所以一般都把 Weierstrass 在 1871 年提出的例子

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^n\pi x)\ (0<b<1,a\text{ 为奇的正数})$$

作为第一个例子，并且称函数 f 为 Weierstrass 函数．这种例子现在已有很多，其中最简单的是 Van der Waerden 于 1930 年提出的例子，现介绍如下：令

$$w(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^nx\}}{10^n},$$

其中记号$\{y\}$表示数 y 与它最近整数间的距离．例如，$\{3.1\}=0.1$，$\{-6\}=0$，$\{1.83\}=0.17$．

我们依次考虑并证明下述命题：

(i) 设 $f_0(x)=\{x\}$，则 f_0 是具有周期为 1 的连续函数，它在[0,1]上的解析表达式为

$$f_0(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant 1/2,\\ 1-x, & 1/2<x\leqslant 1.\end{cases}\tag{6}$$

事实上，任取 $x\in(-\infty,+\infty)$，由$\{x\}$的定义显然有 $f_0(x+1)=f_0(x)$，且对任意实数 $l,l<1$，$f_0(x+l)\neq f_0(x)$，故 f_0 具有周期 1．又任取 $x\in[0,1]$当 $x\in[0,1/2]$时，$\{x\}=x$；当 $x\in(1/2,1]$时，$\{x\}=1-x$，故(6)成立．显然，$f_0(x)=\{x\}$是连续的．

(ii) 函数 w 在$(-\infty,+\infty)$上连续．

事实上，设 $f_n(x)=\{10^nx\}$，则

$$f_n\left(x+\frac{1}{10^n}\right)=\left\{10^n\left(x+\frac{1}{10^n}\right)\right\}=\{10^nx+1\}$$
$$=\{10^nx\}=f_n(x)\ .$$

显然，$1/10^n$ 是满足 $f_n(x+l)=f_n(x)$ 的最小正实数，故 f_n 具有周期 $1/10^n$. 又由(i)知，f_n 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $|f_n(x)|\leqslant 1/2$，因而级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^nx\}}{10^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_n(x)}{10^n}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，故和函数 w 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(iii) 函数 w 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处不可微.

为证明这个结果，我们只要证明对任意 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，存在数列 $\{x_n\}\subset(-\infty,+\infty)$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，但是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w(x_n)-w(x_0)}{x_n-x_0}$$

不存在就可以了. 对任意 n，在 $(-\infty,+\infty)$ 中选取 x_n，满足 $|x_n-x_0|=1/10^n$（这只要取 $x_n=x_0\pm 1/10^n$ 即可），则当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x_0$. 固定 n，当 $k\geqslant n$ 时，$1/10^n$ 是 $f_k(x)$ 的周期 $1/10^k$ 的整数倍，所以 $f_k(x_n)=f_k(x_0)$ $(k\geqslant n)$，从而

$$f_k(x_n)-f_k(x_0)=0\ (k\geqslant n)\ .$$

当 $k\leqslant n-1$ 时，$f_k(x_n)-f_k(x_0)=\pm 10^{k-n}$，因此

$$\frac{w(x_n)-w(x_0)}{x_n-x_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k(x_n)-f_k(x_0)}{10^k(x_n-x_0)}$$
$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\pm 10^{k-n}}{10^k(\pm 10^{-n})}=\sum_{k=0}^{n-1}\pm 1\ .$$

这就是说，对于任意自然数 n，$[w(x_n)-w(x_0)]/(x_n-x_0)$ 是 n 项之和，其中每一项是 $+1$ 或 -1. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{w(x_n)-w(x_0)}{x_n-x_0}$$

不存在.

注 2 Marchis[148]把 Van der Waerden 函数作了推广，他指

出，函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p^{-n}\{p^n x\}\quad(p>1\text{是整数})$$

在区间[0,1]上连续而无处可微．当 $p=10$ 时，f 就是 Van der Waerden 函数．

Schubert[171]利用 van der Waerden 函数构造了在[0,1]的某个正测度集上为 0 且在[0,1]上连续而无处可微的函数．他的作法如下：任给 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，我们用 C_ε 代表 $I=[0,1]$ 中的完备疏集，使 $mC_\varepsilon>1-\varepsilon$. 于是，$C_\varepsilon=I\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，其中 $E_n=(a_n,b_n)$ 是 I 中两两不相交的开区间．考虑[0,1]上处处连续而无处可微的 Van der Waerden 函数

$$w(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\{10^n x\}}{10^n}.$$

注意，$w(0)=w(1)=0$. 我们在 I 上如下定义函数 f：在 C_ε 上，令 $f\equiv 0$，而在 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 的闭包 $\overline{E}_n$ 上，定义 f 为相应的 Van der Waerden 函数．于是，f 在 I 上连续而无处可微，且在正测度集 C_ε 上，$f\equiv 0$.

对于任给的完备疏集 $E\subset[0,1]$，Lipiński[146]也作出了一个在[0,1]上无处可微的连续函数 f，使得当 $x\in E$ 时，$f(x)=0$，而当 $x\in[0,1]\setminus E$ 时，$f(x)>0$.

2.5.4 稠密集上函数不连续的一个定理

容易证明，函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数或}0,\\ 1/q, & x=p/q,p\text{与}q\text{为互质整数}\end{cases}$$

在无理点及 0 连续，而在其它的点（这种点的全体构成实数集 R 的一个稠密子集）均不连续．

我们自然要问：f 在连续点上是否可微？由于当 $x\neq 0$ 及 $x\neq -1$ 时，$f(x)=f(x+1)$，故我们只要考虑 f 在区间[0,1]的连续点上是否可微，这个问题的答案是：f 在连续点上无处可微．下面

给出的一个初等证明选自文献[160].

(i) 若 $x=0, h\neq 0$,则

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(h)}{h}.$$

取$\{h_n\}$是趋于 0 的无理数列,则$\lim\limits_{n\to\infty} f(h_n)/h_n=0$. 再取 $h_n=1/n$,则 $f(h_n)/h_n=1$. 可见$\lim\limits_{n\to\infty} f(h)/h$ 不存在,故 f 在 $x=0$ 不可微.

(ii) 若 x 是无理数,$0<x<1, h\neq 0$,则

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{f(x+h)}{h}.$$

令$\{h_n\}$是趋于 0 的实数列,使 $x+h_n(n=1,2,\cdots)$是无理数,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+h_n)}{h_n}=0.$$

设 $x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,取 $h_n=0.a_1a_2\cdots a_n-x$. 由于 $x\neq 0$,故对某个 n 有 $a_n\neq 0$. 设 N 是使 $a_N\neq 0$ 的最小自然数,则

$$\frac{f(x+h_n)}{h_n}\geqslant 1 \quad (n\geqslant N).$$

因此,$\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)/h$ 不存在,即 f 在 x 不可微.

上述例子中的函数 f 在一个稠密集上不连续,而在一个残余集(即其补集为第一纲集)上连续,但 f 在这个残余集上并不可微. 于是,我们自然要进一步问:这只是个别现象,还是普遍规律?精言之,若函数 f 在一个稠密集上不连续,而在一个残余集上连续,那么,f 能否在这个残余集上可微? Fort[123]指出,f 在这个残余集上不能处处可微.

先引入下列记号:设 f 是定义在实数集 R 上的实值函数,A 表示 f 的不连续的点所成之集,B 表示 f 的可微的点所成之集,C 表示 f 连续而不可微的点所成之集.

定理 5 若 A 是实数集 R 的稠密子集,则 B 必为第一纲集.

证 对每个自然数 n,令 D_n 为所有这样的点 p 所成之集,在 p 的 $1/n$ 邻域内,存在点 x 与 y,使

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-\frac{f(y)-f(p)}{y-p}>1.$$

令 $D=\bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$. 显然，$f$ 在 D 的每一点均不可微.

如能证明 D 是残余集，也就证明了 B 是第一纲集. 为证 D 是残余集，只要证明对每一 n，D_n 的内点集是 R 的一个稠密集. 为此，任取开区间 J，因 A 在 R 中稠密，故存在 $q\in J\cap A$. 又，f 在点 q 不连续，故可取实数 h 和 k，使

$$\max\{f(q),\limsup_{t\to q} f(t)\}>h>k>\min\{f(q),\liminf_{t\to q} f(t)\}. \tag{7}$$

现取 $p\in J$，使 $q-1/n<p<q$，$h-k>q-p$，于是有

$$\frac{h-f(p)}{q-p}-\frac{k-f(p)}{q-p}=\frac{h-k}{q-p}>1.$$

据(7)，存在充分接近 q 的点 x 与 y，使得 $f(x)>h$，$f(y)<k$. 也就是说，在 p 的 $1/n$ 邻域内存在 x 与 y，使得

$$\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-\frac{f(y)-f(p)}{y-p}>1.$$

因此，$p\in D_n$. 显然，所有适合条件 $q-1/n<p<q$，$h-k>q-p$ 的点 $p\in J$ 构成了 D_n 的一个开子集，因而 p 是 D_n 的一个内点，可见 D_n 的内点集是 R 的一个稠密集.

推论 1 设 A，B 是实数集 R 的两个稠密子集，则 C 必是残余集，因而也是 R 的稠密子集.

证 因 f 在稠密集 B 上可微，故 f 在 B 上亦必连续. 由周知的定理，A 必为第一纲集. 又，上述定理 5 证明了 B 是第一纲集，故 $A\cup B$ 也为第一纲集，而 C 是 $A\cup B$ 的补集，可见 C 必为残余集.

2.5.5 评注

对可微函数来说，其导函数未必连续. 导函数的连续性问题，与函数的一致可微性紧密相关. 本节关于导函数的连续性和函数的一致可微性的主要结论，分别选自 Weinstock[182]和李文亮[31]的文章. 当 I 是有限闭区间$[a,b]$时，2.5.2 的定理 3 即变成 2.5.1 的定理 1，这时函数的连续可微性与一致可微性等价. 所以，在有

限闭区间上，导函数的连续性实际上就是函数的一致可微性．

若函数 f 可微，则 f 必定连续，但反之不成立．在其定义域中的个别点（或某些点）处不可微的连续函数的例子是容易举出的，几乎每一本数学分析教科书中都有这种例子．但要举出在定义域上处处连续而无处可微的函数的例子，却不容易．在数学分析的历史上，许多著名数学家，如 Bolzano，Weierstrass，van der Waerden 等，都曾研究过这种例子．现在这方面的例子已有不少，我们在 2.5.3 中主要介绍了 van der Waerden 的例子，并称其为范氏函数．在文章[148]中，Marchis 推广了范氏函数．Schubert[171]进一步利用范氏函数，构造了一个在[0,1]的某个正测度集上为 0 且在[0,1]上连续而无处可微的函数．这些处处连续而无处可微的函数，都是通过取极限的手续而得到的．能否不通过取极限的办法来构造处处连续而无处可微的函数呢？针对这个问题，Bush 不通过取极限手续构造了一个处处连续而无处可微的函数．

§2.6 导数介值定理的几种证明

定理 1（导数介值定理） 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可微，且 $f'(a)\neq f'(b)$，则对于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任一数 μ，必有一点 $c\in(a,b)$，使 $f'(c)=\mu$.

赵根榕和熊必璠[78]给出了导数介值定理的几种证明，兹介绍如下：

证法 1 不妨设 $f'(a)<\mu<f'(b)$．作一辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\mu x, x\in[a,b]$．因 f 在 $[a,b]$ 上可微，故 φ 在 $[a,b]$ 上也可微，从而它在 $[a,b]$ 上能取到最小值．设 $\varphi(\xi)$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值．

若 $\xi\in(a,b)$，因 φ 在 $[a,b]$ 上可微，故由 Fermat 定理得到 $\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\mu=0$，即 $f'(\xi)=\mu$.

若 $\xi=a$ 或 b，即 $\varphi(a)$ 或 $\varphi(b)$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值，即对

$x\in[a,b]$，$\varphi(a)\leqslant\varphi(x)$或$\varphi(b)\leqslant\varphi(x)$. 但是，这是不可能的，理由如下：若对$x\in[a,b]$，$\varphi(a)\leqslant\varphi(x)$，则有

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}\geqslant 0,$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}=\varphi'(a)\geqslant 0.$$

而$\varphi'(a)=f'(a)-\mu\geqslant 0$，即$f'(a)\geqslant\mu$. 这与$f'(a)<\mu$矛盾. 因此$\xi$不可能是$a$. 同理$\xi$不可能是$b$. 于是，$\xi$只能在$(a,b)$内，定理1得证.

证法2 作函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b,\\ f'(a), & x=a.\end{cases}$$

因f在a可微，故

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$

从而g在$[a,b]$上连续. 由连续函数介值定理知，对$g(b)$和$f'(a)$之间的任何值μ_1，必存在$\xi\in(a,b)$使$g(\xi)=\mu_1$. 又由微分中值定理，

$$g(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}=f'(c_1),\quad a<c_1<\xi,$$

故存在$c_1\in(a,b)$，使$f'(c_1)=\mu_1$.

同理作函数

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}, & a\leqslant x<b,\\ f'(b), & x=b.\end{cases}$$

h在$[a,b]$上连续，由连续函数介值定理，对$h(a)$和$f'(b)$之间的任意值μ_2，必存在$\eta\in(a,b)$而有$h(\eta)=\mu_2$. 由微分中值定理，存在$c_2\in(a,b)$，使$f'(c_2)=\mu_2$.

因$g(b)=h(a)$，$f'(a)\neq f'(b)$，故对于$f'(a)$和$f'(b)$之间的任一数，或属于$f'(a)$和$g(b)$之间，或属于$f'(b)$和$h(a)=g(b)$之

间，或等于 $g(b)$. 前两种情况已证明存在一点

$$c=\begin{cases}c_1, \text{若 } \mu \text{ 在 } f'(a) \text{ 和 } g(b) \text{ 之间}, \\ c_2, \text{若 } \mu \text{ 在 } f'(b) \text{ 和 } g(b) \text{ 之间}, \end{cases}$$

使得 $f'(c)=\mu, c\in(a,b)$. 若 $\mu=g(b)$，由微分中值定理：

$$\mu=g(b)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \quad a<c<b.$$

证法 3 不妨设 $f'(a)<\mu<f'(b)$，并取 A 和 B 满足 $f'(a)<A<\mu<B<f'(b)$，则

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<A,$$

$$f'(b)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}>B.$$

于是存在 $\delta>0$，当 $0<|\Delta x|<\delta$ 时，有

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}<A, \quad \frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x}>B.$$

取 $0<\delta^*<\min\{\delta,(b-a)/2\}$，即有

$$\frac{f(a+\delta^*)-f(a)}{\delta^*}<A,$$

$$\frac{f(b-\delta^*)-f(b)}{-\delta^*}=\frac{f(b'+\delta^*)-f(b')}{\delta^*},$$

其中 $b'=b-\delta^*$（显然 $a<b'<b$）. 考虑函数

$$g(x)=\frac{f(x+\delta^*)-f(x)}{\delta^*},$$

它在$[a,b']$上连续，且

$$g(a)=\frac{f(a+\delta^*)-f(a)}{\delta^*}<A,$$

$$g(b')=\frac{f(b'+\delta^*)-f(b')}{\delta^*}>B.$$

因 $A<\mu<B$，故由连续函数介值定理，存在 $\xi\in(a,b')$，使

$$g(\xi)=\frac{f(\xi+\delta^*)-f(\xi)}{\delta^*}=\mu.$$

由微分中值定理，存在 $c\in(\xi,\xi+\delta^*)$，使

$$\cdot \quad \frac{f(\xi+\delta^*)-f(\xi)}{\delta^*}=f'(c)\ ,$$

即有 $f'(c)=\mu$. 又由于 $\xi\in(a,b')$，即 $a<\xi<b'$，应有 $a<\xi+\delta^*<b'+\delta^*=b$. 而 $c\in(\xi,\xi+\delta^*)$，故 $c\in(a,b)$.

在给出第四种证法之前，先说明导数介值定理与下一定理等价.

定理 2 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可微，且 $f'(x)\neq 0$，则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于 0 或恒小于 0.

证明等价 若定理 2 成立，不妨设 $f'(a)<\mu<f'(b)$. 令 $\varphi(x)=f(x)-\mu x, x\in[a,b]$，则 $\varphi'(x)=f'(x)-\mu$，从而

$$\varphi'(a)=f'(a)-\mu<0\ ,$$

$$\varphi'(b)=f'(b)-\mu>0\ .$$

这说明 $\varphi'(x)$ 在 $[a,b]$ 上变号. 若不存在一点 $c\in(a,b)$，使 $\varphi'(c)=0$，即 $\varphi'(x)\neq 0, x\in[a,b]$，则由定理 2 知 $\varphi'(x)$ 或恒大于 0 或恒小于 0，这与 $\varphi'(a)<0, \varphi'(b)>0$ 矛盾. 因此有一点 $c\in(a,b)$ 使 $\varphi'(c)=0$，即 $f'(c)=\mu$，故定理 1 成立.

再设定理 1 成立，证明定理 2 成立. 设在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\neq 0$，而 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上不恒大于 0 或不恒小于 0，即 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可变号. 因此，必存在 $x_1,x_2\in[a,b]$，使 $f'(x_1)$ 和 $f'(x_2)$ 异号. 对介于 $f'(x_1)$ 与 $f'(x_2)$ 中的数 0，由导数介值定理必存在 $c\in(a,b)$ 使 $f'(c)=0$，这与在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\neq 0$ 矛盾. 因此，若在 $[a,b]$ 上 $f'(x)\neq 0$，则 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒大于 0 或恒小于 0.

证法 4 由于定理 1 与定理 2 等价，故我们只要证明定理 2 即可.

首先注意到，由于 $f'(x)\neq 0, x\in[a,b]$，因而在 $[a,b]$ 中不可能有两点 x_1,x_2，使 $f(x_1)=f(x_2)$. 否则由 Rolle 定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset[a,b]$，使 $f'(\xi)=0$，这与 $f'(x)\neq 0$ 矛盾. 于是在 $[a,b]$ 内任意两点，$f(x)$ 的值不可能相等.

其次，不妨设 $f(a)>f(b)$. 此时可证 $f'(x)<0, x\in[a,b]$. 反设存在 $c\in[a,b]$，使 $f'(c)>0$. 因

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)>0 \quad (\text{可设 } c\neq b),$$

即有 $f(c+\Delta x)-f(c)>0$，故存在 $d>c$，使 $f(c)<f(d)$.

若 $f(c)<f(b)$，由于 $f(b)<f(a)$，则在$[a,c]$中必有一点，使 $f(x)$取得其介值 $f(b)$，从而在$[a,b]$上 $f(x)$有相等值，与上述证明矛盾．故 $f(c)<f(b)$不可能．

若 $f(c)>f(b)$，由于 $f(c)<f(d)$，故在$[d,b]$中有一点，使 $f(x)$取得其介值 $f(c)$，因此 $f(c)>f(b)$不可能．显然，$f(c)=f(b)$也不可能．这正说明若在$[a,b]$上 $f(a)>f(b)$，$f'(x)\neq 0$，则不可能有一点 c，使 $f'(c)>0$，从而证明了在$[a,b]$上 $f'(x)<0$.

若 $f(a)<f(b)$，同理可证 $f'(x)\neq 0$ 蕴含 $f'(x)>0, x\in[a,b]$. 定理 2 证毕．

§2.7 微分中值定理及其推广

在本节中，我们把 Rolle 定理、Lagrange 定理和 Cauchy 定理统称为微分中值型定理．这些定理是微分学的理论基础，是沟通函数及其导数的桥梁，不但在理论上处于很重要的地位，而且具有十分广泛的应用．

2.7.1 关于 Rolle 定理的证明

Rolle 定理是微分学中最基本、最重要的定理之一，其应用很广．下面我们给出两个不同于通常的数学分析教科书中的证明．

定理 1(Rolle 定理) 设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续且在开区间(a,b)内可微．若 $f(a)=f(b)$，则存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=0$.

证法 1 不妨假设 $f(a)=f(b)=0$. 记 $a_0=a, b_0=b, m_0=(b_0+a_0)/2, p_0=(m_0+a_0)/2, q_0=(b_0+m_0)/2$. 不妨设 $f(m_0)\geqslant 0$(相反的情形留给读者)．从 m_0, p_0, q_0 这三个数中选出一个，记为 m_1，使得

$$f(m_1)=\max\{f(m_0),f(p_0),f(q_0)\}$$

(当这三个函数值中有两个以至三个值相等时，我们在选取 m_1 时按照 m_0,p_0,q_0 的排列次序左边的优先当选). 并令 $a_1=m_1-(b_0-a_0)/4$，$b_1=m_1+(b_0-a_0)/4$，$p_1=(m_1+a_1)/2$，$q_1=(b_1+m_1)/2$. 从 m_1,p_1,q_1 这三个数中又选一个出来记为 m_2，使得

$$f(m_2)=\max\{f(m_1),f(p_1),f(q_1)\}$$

(特殊情况下的选取规则同上). 并令 $a_2=m_2-(b_1-a_1)/4$，$b_2=m_2+(b_1-a_1)/4$，$p_2=(m_2+a_2)/2$，$q_2=(b_2+m_2)/2$. 如此继续下去，得到一列闭区间

$$[a_0,b_0]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots,$$

并显然满足

$$f(m_i)\geqslant f(a_i),\ f(m_i)\geqslant f(b_i). \tag{1}$$

因此存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\lim_{i\to\infty}a_i=\lim_{i\to\infty}b_i=\lim_{i\to\infty}m_i=c\quad(a_i\leqslant c\leqslant b_i).$$

据 f 的连续性，有

$$\lim_{i\to\infty}f(a_i)=\lim_{i\to\infty}f(b_i)=\lim_{i\to\infty}f(m_i)=f(c).$$

不难看出，$c\in(a,b)$. 事实上，如果有某个 $f(m_i)>0$，显然 $f(c)>0$，故 $c\neq a,c\neq b$. 如果 $f(m_i)=0(i=0,1,2,\cdots)$，则由区间 $[a_i,b_i]$ 的作法可知 $c=m_0$.

由(1)式得到

$$\frac{f(c)-f(a_i)}{c-a_i}\geqslant 0,\frac{f(b_i)-f(c)}{b_i-c}\leqslant 0. \tag{2}$$

令 $i\to\infty$，由(2)得 $f'(c)=0$，$c\in(a,b)$.

证法 2 这种证明基于下面两个事实：

(i) 如果 f 在闭区间 $[c,d]$ 上连续并且 $f(c)=f(d)$，那么存在 $\alpha,\beta\in[c,d]$，满足 $\beta-\alpha=(d-c)/2$，及 $f(\alpha)=f(\beta)$. 事实上，考虑函数

$$g(x)=f(x+(d-c)/2)-f(x).$$

显然 $g((c+d)/2)=-g(c)$. 于是应用连续函数介值定理得知结

论成立.

(ii) 如果 f 在某内点 x 处可微,那么对于任意两个数列 $\{\alpha_n\},\{\beta_n\}$ 满足 $\alpha_n\leqslant x\leqslant\beta_n,\alpha_n\to x,\beta_n\to x(n\to\infty)$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\beta_n)-f(\alpha_n)}{\beta_n-\alpha_n}=f'(x).$$

现在转向 Rolle 定理的证明:重复应用(i),我们得到$[a,b]$的子区间列 $[\alpha_n,\beta_n]$ $(n=0,1,2\cdots)$ 满足:①$\beta_n-\alpha_n=(b-a)/2^n$,②$f(\alpha_n)=f(\beta_n)$,③ $[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]\subset[\alpha_n,\beta_n](n=0,1,2\cdots;[\alpha_0,\beta_0]=[a,b])$. 这里需要特别说明一下选取$[\alpha_2,\beta_2]$时应注意的规则:假如已确定 $[\alpha_1,\beta_1]=[a,(a+b)/2]$ $(f(a)=f((a+b)/2))$. 如果 $f((3a+b)/4)$与 $f((a+3b)/4)$之一又恰巧等于 $f(a)$时,我们规定选取$[(3a+b)/4,(a+b)/2]$或者$[(a+b)/2,(a+3b)/4]$为$[\alpha_2,\beta_2]$. 这样,$\{\alpha_n\}$与$\{\beta_n\}$显然有相同的极限 $c(\alpha_n\leqslant c\leqslant\beta_n)$,并且 $c\neq a,c\neq b$. 应用(ii)易知 $f'(c)=0,a<c<b$.

2.7.2 Lagrange 定理及其证明方法

定理 2(Lagrange 定理) 若函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续且在开区间(a,b)内可微,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

推论 1 设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续,若 f 在(a,b)内除了有限个点外可微,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant|f'(\xi)|(b-a). \tag{1}$$

证 不妨设 f 仅在 $d\in(a,b)$不可微,分别在区间$[a,d]$与$[d,b]$上应用 Lagrange 定理,得到

$$f(d)-f(a)=f'(\xi_1)(d-a),\xi_1\in(a,d),$$

$$f(b)-f(d)=f'(\xi_2)(b-d),\xi_2\in(d,b).$$

令$|f'(\xi)|=\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}$,便得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant|f'(\xi)|(b-a).$$

推论 2 设函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续. 若 f 在(a,b)内除了 n 个点外可微,则存在 $n+1$ 个点 $a<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_{n+1}<b$ 及 n

$+1$ 个正数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$，使得 $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i=1$ 且

$$f(b)-f(a)=\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i f'(\xi_i)(b-a)\ .$$

证 不妨设 f 仅在 $d\in(a,b)$ 不可微，分别应用定理 2 到 $[a,d]$ 与 $[d,b]$ 上，得到

$$f(d)-f(a)=f'(\xi_1)(d-a),\xi_1\in(a,d)\ ,$$

$$f(b)-f(d)=f'(\xi_2)(b-d),\xi_2\in(d,b)\ .$$

取 α_1,α_2，使 $\alpha_1(b-a)=d-a,\alpha_2(b-a)=b-d$，则 $\alpha_1+\alpha_2=1,\alpha_1>0,\alpha_2>0$，且

$$f(b)-f(a)=[\alpha_1 f'(\xi_1)+\alpha_2 f'(\xi_2)](b-a)\ .$$

这个证明方法显然可以推广到 f 在 n 个点 $(n>1)$ 上不可微的情形．推论得证．

Lagrange 定理又称为微分中值定理，它是 Rolle 定理的推广，因而在证明它时，自然要把满足它的条件的函数 f 转化成满足 Rolle 定理条件的函数 φ，即由函数 f 构造辅助函数 φ．于是构造辅助函数就成了证明 Lagrange 定理的基本手段．构造辅助函数的方法主要有以下几种．

一、分析法

我们将定理 2 中的微分中值公式表示成

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\ ,$$

令 $[f(b)-f(a)]/(b-a)=r$，则 $f(b)-r\,b=f(a)-ra$．若设 $\varphi(x)=f(x)-rx$，即

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x\ ,$$

则只要能证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $\varphi'(\xi)=0$，即可得出结论．剩下的问题就是验证函数 φ 在 $[a,b]$ 上满足 Rolle 定理的条件，而这由函数 f 满足定理 2 的条件即可知道．这个函数 φ 就是我们要构造的辅助函数中形式上较为简单的一个．

用同样的方法可以得到证明 Cauchy 中值定理的辅助函数．

二、试验法

试验法的基本思路是：设函数 f 满足定理 2 的条件，在 f 的基础上再加上一个函数 g(试验函数)，使得和函数 $\varphi=f+g$ 满足 Rolle 定理的条件.

首先，我们从最简单的常值函数开始试验.

1. 取 $g(x)=C, x\in[a,b]$，得和函数 $\varphi(x)=f(x)+C$. 由于 $f(a)\neq f(b)$，故 $\varphi(a)\neq\varphi(b)$. 这样函数 φ 不满足 Rolle 定理的条件. 取 $g(x)=C$ 的试验失败了.

2. 比常值函数复杂一点的函数为一次函数. 取 $g(x)=mx+n, x\in[a,b], m\neq0$，得和函数 $\varphi(x)=f(x)+mx+n$. 显然，φ 在$[a,b]$上连续且在(a,b)内可微. 为使 φ 满足 Rolle 定理的最后一个条件，考虑 $\varphi(a)=\varphi(b)=q$. 不失一般性，可令 $q=0$. 解方程组 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，即 $am+n=-f(a), bm+n=-f(b)$，得

$$m=-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, n=-f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a.$$

故

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

这样，辅助函数 φ 就可构造出来.

为证 Lagrange 定理的推广——Cauchy 中值定理，再继续试验.

3. 取 $g(x)=mF(x)+n, x\in[a,b]$，其中函数 F 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可微，且 $F(a)\neq F(b)$. 令

$$\varphi(x)=f(x)+g(x)=f(x)+mF(x)+n,$$

其中 f 在$[a,b]$上连续且在(a,b)内可微. 解方程组：

$$\begin{cases}\varphi(a)=0,\\ \varphi(b)=0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}F(a)m+n=-f(a),\\ F(b)m+n=-f(b).\end{cases}$$

得

$$m=-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)},\quad n=-f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F(a).$$

故

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)].$$

这样函数 φ 满足 Rolle 定理的全部条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，因而

$$f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}F'(\xi)=0.$$

当 $F(x)=x$ 时，便得 Lagrange 定理的结论：

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a},\xi\text{ 介于 }a,b\text{ 之间}.$$

当 $F'(x)\neq0$ 时，便得 Cauchy 中值定理的结论：

$$\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)},\xi\text{ 介于 }a,b\text{ 之间}.$$

三、待定系数法

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 内可微．任取 $x_0,x\in[a,b]$，$x_0\neq x$，考虑下式

$$f(x)-f(a)=M(x-a),$$

其中 M 为待定常数．不妨设 $x>x_0$，令

$$\varphi(t)=f(t)-f(x_0)-M(t-x_0),\quad t\in[x_0,x],$$

则

$$\varphi'(t)=f'(t)-M.\text{ 又 }\varphi(x_0)=\varphi(x)=0,$$

故由 Rolle 定理知存在 $\xi\in(x_0,x)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，因而 $M=f'(\xi)$，故

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0).$$

待定系数的更一般方法是，考虑

$$\varphi(x)=\alpha f(x)+\beta x+\gamma,x\in[a,b],$$

其中 α,β,γ 为常数．函数 φ 在$[a,b]$上连续、在(a,b)内可微．又 $\varphi(a)=\alpha f(a)+\beta a+\gamma,\varphi(b)=\alpha f(b)+\beta b+\gamma$．令 $\varphi(a)=\varphi(b)$，得

$$\beta=-\alpha\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\text{也可取 }\alpha=-\beta\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\right),$$

故

$$\varphi(x)=\alpha f(x)-\alpha\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x+\gamma,$$

或

$$\varphi(x) = -\beta\frac{b-a}{f(b)-f(a)}f(x) + \beta x + \gamma ,$$

式中 α,β,γ 是任意常数，因而所要建立的辅助函数是一函数族.

若令 $\alpha=1,\gamma=0$，则

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,\ x\in[a,b] .$$

若令 $\alpha=1,\gamma=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}a-f(a)$，则

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) .$$

若令 $\alpha=b-a,\gamma=af(b)-bf(a)$，则

$$\varphi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix} .$$

用它们都可以证明微分中值定理.

四、几何法

设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足定理 2 的条件，欲证存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a) .$$

曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$（$y=f(x)$）与弦 $\overline{AB}$ 相交于端点 A,B 两点（如图 1）. 利用函数 $y=f(x)$ 及弦 $\overline{AB}$ 所表示的函数的纵坐标之差来构造辅助函数 φ. 对同一个 x，曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 与弦 $\overline{AB}$ 在区间端点 a，

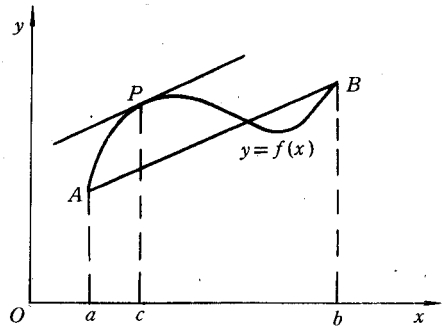

图 1

b 的纵坐标之差都是 0，即 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 由于弦 $\overline{AB}$ 的斜率为 $[f(b)-f(a)]/(b-a)$，故其方程为

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

或者

$$y=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+f(b).$$

于是，令

$$\varphi(x)=f(x)-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right],$$

即

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

则函数 φ 满足 Rolle 定理的条件，故存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，因而

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

同样，也可令

$$\varphi(x)=f(x)-f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b).$$

综上所述，在证明微分中值定理时，可选以下函数为辅助函数：

$$\varphi_1(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

$$\varphi_2(x)=f(x)-f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b),$$

$$\varphi_3(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+c,$$

$$\varphi_4(x)=f(x)-f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)+c,$$

$$\varphi_5(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ b & f(b) & 1 \\ a & f(a) & 1 \end{vmatrix}.$$

当曲线$\overset{\frown}{AB}$的方程为参数方程

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases} \qquad (a \leqslant t \leqslant b)$$

时，弦$\overline{AB}$的方程为

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(x - g(a)),$$

即

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(t) - g(a)] + f(a).$$

因曲线弧$\overset{\frown}{AB}$和弦$\overline{AB}$在端点 A,B 处相交，故弧$\overset{\frown}{AB}$与弦$\overline{AB}$在两端点处的纵坐标之差等于 0. 据此，引进辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)] - f(a),$$

则函数 φ 满足 Rolle 定理的条件，故存在 $\xi \in (a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，从而得到

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

2.7.3 微分中值定理的推广

微分中值型定理有许多推广，这里，我们着重介绍 Lagrange 定理和 Cauchy 定理的几种推广.

1951 年，Karamata[137]把微分中值定理推广到下述形式：

定理 3(Karamata) 若函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续，而在开区间(a,b)内存在左、右导数f'_-，f'_+，则存在 $x_0 \in (a,b)$及 $p \geqslant 0, q \geqslant 0, p+q=1$，使得

$$[pf'_+(x_0) + qf'_-(x_0)](b - a) = f(b) - f(a).$$

1952 年，Vučković[178]进一步推广 Karamata 定理如下：

定理 4(Vučković) 若函数 f,g 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内存在左、右导数f'_-，f'_+，g'_-，g'_+，则存在 $x_0 \in (a,b)$及 $p \geqslant 0, q \geqslant 0, p+q=1$，使得

$$[pf'_+(x_0)+qf'_-(x_0)][g(b)-g(a)]$$
$$=[pg'_+(x_0)+qg'_-(x_0)][f(b)-f(a)].$$

1957 年，Goodner[126] 指出，Vučković 定理可直接由 Kametani[136]的一个结果得到．这里，我们把 Goodner 的证法介绍如下：

对 $a\leqslant x\leqslant x'\leqslant b$，令 $I=[x,x']$，$\varphi(I)=f(x')-f(x)$，$\psi(I)=g(x')-g(x)$，则 φ,ψ 是闭区间 $I_0=[a,b]$上的可加且连续的区间函数．因此，据[172,p. 2]，存在一点 x_0 及单减的闭区间列$\{I_n\}=\{[a_n,b_n]\}$，使得

(i) $I_0\supset I_1\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$，

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

(iii) x_0 是每个区间 I_n 的内点，即 $a_n<x_0<b_n(n=1,2,\cdots)$，

(iv) $[f(b_n)-f(a_n)][g(b)-g(a)]$
$=[g(b_n)-g(a_n)][f(b)-f(a)]$，$n=1,2,\cdots$

由于 $a_n<x_0<b_n$，$b_n-a_n\neq0$，故由(iv)得到

$$\left[\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right][g(b)-g(a)]$$
$$=\left[\frac{g(b_n)-g(a_n)}{b_n-a_n}\right][f(b)-f(a)],\ n=1,2,\cdots$$

上式可改写为

$$\left[\frac{f(b_n)-f(x_0)}{b_n-x_0}\cdot\frac{b_n-x_0}{b_n-a_n}+\frac{f(x_0)-f(a_n)}{x_0-a_n}\cdot\frac{x_0-a_n}{b_n-a_n}\right]\times[g(b)-g(a)]$$
$$=\left[\frac{g(b_n)-g(x_0)}{b_n-x_0}\cdot\frac{b_n-x_0}{b_n-a_n}+\frac{g(x_0)-g(a_n)}{x_0-a_n}\cdot\frac{x_0-a_n}{b_n-a_n}\right]\times[f(b)-f(a)]. \tag{1}$$

由于 $0<(b_n-x_0)/(b_n-a_n)<1(n=1,2,\cdots)$，故存在 $p(0\leqslant p\leqslant1)$及$\{I_n\}$的子列$\{I_{n'}\}$，使得

$$\lim_{n'\to\infty}\frac{b_{n'}-x_0}{b_{n'}-a_{n'}}=p,$$

亦有

$$\lim_{n'\to\infty}\frac{x_0-a_{n'}}{b_{n'}-a_{n'}}=q\ ,$$

而且 $p+q=1$. 因此，在式(1)中用 n' 代替 n，并令 $n'\to\infty$，便得

$$[pf'_+(x_0)+qf'_-(x_0)][g(b)-g(a)]$$
$$=[pg'_+(x_0)+qg'_-(x_0)][f(b)-f(a)]\ .$$

定理 4 证毕.

特别，令 $g(x)=x$，便得 Karamata 的定理 3.

Goodner[126]对定理 4 作了推广，先引入下列概念：

定义 1 设函数 f 定义在区间$[\xi,\xi+h)$上. 若存在数列$\{b_n\}$，$0<b_n<h$，$b_n\to0(n\to\infty)$，使极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(\xi+b_n)-f(\xi)}{b_n}=A$$

存在，则称 A 为 f 在 ξ 的广义右导数，记作 $D_rf(\xi)$.

类似地，可定义 f 在 ξ 的广义左导数，并记作 $D_lf(\xi)$.

显然，f 在 ξ 的广义左、右导数并不唯一.

定义 2 设函数 f 定义在开区间(a,b)内，称 f 在 $\xi\in(a,b)$具有有界广义导数，是指 f 在 ξ 的一切广义导数组成之集是有界的.

若 f 在(a,b)内每一点都有有界广义导数，则称 f 在(a,b)内有有界广义导数.

定理 5 设函数 f,g 在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内均有有界广义导数，则存在 $\xi\in(a,b)$，$p\geqslant0$，$q\geqslant0$，$p+q=1$，以及 $D_rf(\xi)$，$D_lf(\xi)$，$D_rg(\xi)$，$D_lg(\xi)$，使得

$$[pD_rf(\xi)+qD_lf(\xi)][g(b)-g(a)]$$
$$=[pD_rg(\xi)+qD_lg(\xi)][f(b)-f(a)]\ .$$

定理 5 的证法与定理 4 的证法颇为相似，此处不再赘述.

注 1 闫革兴、战新山[27]介绍了含有 Dini 导数的 Lagrange 定理、Cauchy 定理及余项含有 Dini 导数的 Taylor 公式，并给出含有上(下)导数的 Newton-Leibniz 公式，读者如有兴趣，可参看他们的原文.

为了介绍 Cauchy 中值定理的一些推广，我们先引述下面的

二阶 Cauchy 中值定理：

定理 6 若函数 f 与 g 在闭区间$[a,b]$上二阶可微，且 $g''\neq 0$，则必有 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)}{g(b)-2g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(a)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}. \tag{2}$$

李元中，冯汉桥[34]进一步证明了高阶 Cauchy 中值定理.

定理 7 若函数 f 与 g 在闭区间$[a,b]$上连续、在开区间(a,b)内 n 次可微，且 $g',g'',\cdots,g^{(n)}$ 皆不为 0，则必有 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left[b-\frac{k(b-a)}{n}\right]}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k g\left[b-\frac{k(b-a)}{n}\right]}=\frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}. \tag{3}$$

证 当 $n=1$ 时，(3)就是 Cauchy 中值公式.

假设当 $n-1$ 时(3)式成立，即

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k f\left[b-\frac{k(b-a)}{n-1}\right]}{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k g\left[b-\frac{k(b-a)}{n-1}\right]}=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{g^{(n-1)}(\xi)}. \tag{4}$$

现证对 n，(3)式也成立. 为此，作辅助函数

$$F(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left[x-\frac{k(x-a)}{n}\right]-\lambda\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k g\left[x-\frac{k(x-a)}{n}\right], \tag{5}$$

其中 λ 是使 $F(b)=0$ 的常数. 显然，$F(a)=0$，故由 Rolle 定理知，存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $F'(\eta)=0$，即

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k f'\left[\eta-\frac{k(\eta-a)}{n}\right]-\lambda\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k g'\left[\eta-\frac{k(\eta-a)}{n}\right]=0,$$

从而

$$\lambda=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k f'\left[\eta-\frac{k(\eta-a)}{n}\right]}{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k g'\left[\eta-\frac{k(\eta-a)}{n}\right]}$$

$$=\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k f'\left\{\eta-\frac{k\left[\eta-\left(a+\frac{\eta-a}{n}\right)\right]}{n-1}\right\}}{\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{n-1}^k g'\left\{\eta-\frac{k\left[\eta-\left(a+\frac{\eta-a}{n}\right)\right]}{n-1}\right\}}. \tag{6}$$

对$\left[a+\frac{\eta-a}{n},\eta\right]$上的函数 f' 和 g'，运用归纳法假设(4)，便知有 $\xi\in\left(a+\frac{\eta-a}{n},\eta\right)\subset(a,b)$，使得

$$\lambda=\frac{f^{(n)}(\xi)}{g^{(n)}(\xi)}. \tag{7}$$

又由 $F(b)=0$，知

$$\lambda=\frac{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\left[b-\frac{k(b-a)}{n}\right]}{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k g\left[b-\frac{k(b-a)}{n}\right]}. \tag{8}$$

由(7)，(8)两式便知(3)式成立.

在(3)式中取 $g(x)=x^n$，便得下面的高阶 Lagrange 中值定理.

定理 8 若函数 f 在闭区间$[a,b]$上连续、在开区间(a,b)内 n 阶可微，则有 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k f\left[b-\frac{k(b-a)}{n}\right]=\left(\frac{b-a}{n}\right)^n f^{(n)}(\xi).$$

李逊[38]利用行列式作辅助函数，得到了下面的定理.

定理 9 设函数 f 在闭区间$[a_0,a_3]$上连续、在开区间(a_0,a_3)内三阶可微，且 $a_0<a_1<a_2<a_3$，则必有 $\xi\in(a_0,a_3)$，使得

$$\frac{f(a_0)}{(a_1-a_0)(a_2-a_0)(a_3-a_0)}+\frac{f(a_1)}{(a_0-a_1)(a_2-a_1)(a_3-a_1)}$$

$$+\frac{f(a_2)}{(a_0-a_2)(a_1-a_2)(a_3-a_2)}+\frac{f(a_3)}{(a_0-a_3)(a_1-a_3)(a_2-a_3)}$$
$$=\frac{f'''(\xi)}{3!}.$$

孟宪亭[68]把 Cauchy 中值定理写成了较弱的形式：

定理 10 设函数 f 与 g 在闭区间$[a,b]$上连续、在开区间(a,b)内可微，则必有 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}=0. \tag{9}$$

注 2 由于 Cauchy 中值定理的条件要求 $g'\neq 0$，而(9)式中不要求 $g'(\xi)\neq 0$，因此(9)与 Cauchy 中值公式不等价.

定理 10 可推广为下面的定理(参看[68]).

定理 11 设函数 f,g 和 φ 在闭区间$[a,b]$上连续、在开区间(a,b)内可微，则必有 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & g(b)-g(a) \\ f'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g(b)-g(a) & \varphi(b)-\varphi(a) \\ g'(\xi) & \varphi'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

在定理 11 中令 $g(x)=\varphi(x)=x$，即得 Lagrange 中值定理.

定理 12 设 n 个函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 都在闭区间$[a,b]$上连续且在开区间(a,b)内可微，则必有 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f_1(b)-f_1(a) & f_2(b)-f_2(a) \\ f'_1(\xi) & f'_2(\xi) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} f_2(b)-f_2(a) & f_3(b)-f_3(a) \\ f'_2(\xi) & f'_3(\xi) \end{vmatrix}$$
$$+\cdots+\begin{vmatrix} f_{n-1}(b)-f_{n-1}(a) & f_n(b)-f_n(a) \\ f'_{n-1}(\xi) & f'_n(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

田雨[17]介绍了 Cauchy 中值定理的另一推广.

定理 13 设(1)f 与 g 在闭区间$[a,b]$上连续、在开区间(a,b)内可微；(2)$g(b)\neq g(a)$；(3)在 (a,b) 内不存在 x，使得 $f'(x)$与 $g'(x)$同时为 0，则有 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

证 函数

$$H(x)=f(b)-f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b)-g(x)]$$

在$[a,b]$上连续、在(a,b)内可微，且$H(b)=H(a)=0$. 由 Rolle 定理，必有$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi).$$

若$g'(\xi)=0$，则由上式知$f'(\xi)=0$，这与条件(3)矛盾，故$g'(\xi)\neq 0$.

注 3 通常的 Cauchy 中值定理的条件是定理 13 中的(1)以及(2)′：在(a,b)内$g'(x)\neq 0$. 显然，条件(2)′可以导出条件(2)，(3). 另一方面，取$a=-1,b=1,f(x)=x^2+x,g(x)=x^3$，则$g(x)$不满足通常的 Cauchy 中值定理的条件，但是方程$f'(x)=0$的解并不重合于$g'(x)=0$的解，故对此例，可用推广了的 Cauchy 中值定理(定理 13).

2.7.4 评注

在一元函数微分学中，微分中值型定理是应用函数的局部性质(导数)研究函数在区间上整体性质的重要工具，它们在数学分析中处于十分重要的地位，其中 Lagrange 定理是核心，Rolle 定理是其特殊情况，Cauchy 定理是其推广. 本节主要介绍了部分中外学者对微分中值(型)定理证明方法的探索以及定理的推广工作，而且大多是近 40 年来的成果. 限于篇幅，我们没有选入有关 Taylor 定理的内容.

关于微分中值定理的讨论常常从 Rolle 定理入手，而对这个定理的证明在许多数学分析教程中大多千篇一律，多年不变. 这里介绍的两个证明分别选自文献[100]和[169]. 第一个证明是构造性的，证明本身不仅仅是论证了满足定理 1 结论中$f'(c)=0$的点c的存在性，而且还给出了寻找它的实际计算途径. 而第二个证明则是纯粹存在性的证明. 它们各具特色，而又都富于启发性. 这两个证明都巧妙地运用了闭区间套定理. 1981 年，朱永庚[24]利用有限覆盖定理证明了 Rolle 定理. 1987 年，冯平道[20]利用 Dedekind 分割定理证明了 Rolle 定理.

由于 Lagrange 定理是 Rolle 定理的推广，因而对 Lagrange 定理的证明常常是采用由函数 f 作辅助函数 φ，使 φ 满足 Rolle 定理的条件的方法来进行．这样，构造辅助函数就成了证明 Lagrange 定理的基本手段．在 2..7.2 中，我们总结了构造辅助函数的四种方法，即分析法，试验法，待定系数法和几何法．尽管这几种方法的着眼点不同，对问题的处理各有千秋，但所找到的辅助函数 φ 的形式都是类似的．

Lagrange 微分中值定理有许多推广．这些推广都有一个基本特点，就是把定理条件中可微性概念拓宽，然后推广微分中值表达公式(参看 §2.3 及 §2.7 的 2.7.3)．众所周知，在分析学中有许多种可微概念，因而对每一种可微性都可以考虑建立相应的微分中值定理，甚至在 n 维欧氏空间或无穷维 Banach 空间中都有相应的定理(参看[113]和[84])．本节的定理 3 和定理 4，都是将$[a,b]$上的连续函数在(a,b)内存在导数的条件减弱成在(a,b)内存在左、右导数，从而得到推广的微分中值公式．定理 5 则进一步将左、右导数推广为广义左、右导数．在数学分析中，Dini 导数也是常使用的一种导数．有关含有 Dini 导数的 Lagrange 中值定理、Cauchy 中值定理可参看文献[27]．关于 Lagrange 定理与中间值的唯一性问题，可参看文献[32]．

关于复函数的微分中值定理，也有不少研究．蒋润荣[93]研究了在区域内解析的复函数的微分中值公式．苏子安[28]在[93]工作的基础上得到了关于复函数的一个概括性的微分中值公式，由它可导出若干类似实分析中的微分中值公式．

§2.8 复值函数的 L'Hospital 法则

L'Hospital 法则是求不定式的极限的有力工具，这个法则可叙述如下：

L'Hospital 法则(0/0 型)　若(i) 函数 f 和 g 在$(0,\delta)(\delta>0)$上有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0$，(ii) f' 和 g' 在 $(0,\delta)$上连

续，$g'\neq 0$，且$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)/g'(x)=A$，则

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A.$$

应当注意，对于复值函数不定式的定值问题，L'Hospital 法则不再有效．例如，设

$$f(x)=x, g(x)=x+x^2e^{i/x^2},\quad 0<x<1.$$

由于对一切实数 t，都有$|e^{it}|=1$，因而不难看出，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1. \tag{1}$$

另一方面，有 $g'(x)=1+(2x-2i/x)e^{i/x^2}$，$0<x<1$，所以

$$|g'(x)|\geqslant|2x-\frac{2i}{x}|-1\geqslant\frac{2}{x}-1,$$

于是得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0. \tag{2}$$

由(1)，(2)可知对上述函数 f 与 g 而言，L'Hospital 法则失效．

Carter[111]指出，若再附加下列条件之一，则 L'Hospital 法则仍然有效．

(i) 函数

$$h(x)=\frac{\int_0^x\varphi(y)g'(y)dy}{g(x)}$$

在$(0,\delta)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=0$.

(ii) 函数$|g'|/|g|'$（$|g|'$表$|g|$的导数）在$(0,\delta)$内有定义且有界．

(iii) 函数$r(x)=|\varphi(x)|\cdot|g'(x)|/|g(x)|'$在$(0,\delta)$内有定义且$\lim\limits_{x\to 0^+}r(x)=0$.

(iv) $|g(x)|$在$(0,\delta)$上是单调的实值函数，且 $\varphi(x)$的虚部是$(0,\delta)$上的有界变差函数．

我们先证明在附加条件(i)下，L'Hospital 法则有效．再证明条件(ii)，(iii)，(iv)中的任何一个蕴涵条件(i)，从而结论成立．

在 $\varphi(x)=f'(x)/g'(x)-A$ 两端同乘 $g'(x)$ 并积分，得到

$$f(x)-Ag(x)=\int_0^x \varphi(y)g'(y)dy\ ,$$

从而

$$\frac{f(x)}{g(x)}-A=\frac{\int_0^x \varphi(y)g'(y)dy}{g(x)}\ .$$

据条件(i)，便得 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)/g(x)=A$，即 L'Hospital 法则成立．

下面依次证明：

(ii)蕴涵(i)．因 $|g'|/|g|'$ 在 $(0,\delta)$ 上有界，故存在常数 M，使得对任意 $x\in(0,\delta)$，都有

$$|g'(x)|/|g(x)|'\leqslant M\ ,$$

即 $|g'(x)|\leqslant M|g(x)|'$．而 $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)=0$，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\sigma>0$，当 $0<x<\sigma$ 时，$|\varphi(x)|<\varepsilon/M$．于是，当 $0<x<\sigma$ 时，有

$$\left|\frac{\int_0^x \varphi(y)g'(y)dy}{g(x)}\right|\leqslant\frac{\int_0^x|\varphi(y)||g'(y)|dy}{\int_0^x|g(y)|'dy}$$

$$<\frac{\varepsilon}{M}\cdot\frac{\int_0^x M|g(y)|'dy}{\int_0^x|g(y)|'dy}=\varepsilon\ ,$$

故(i)成立．

(iii)蕴涵(i)．我们有 $|g|'=(g\bar{g}'+g'\bar{g})/2|g|$，其中 $\bar{g}$ 是 g 的共轭复值函数，而 g' 连续，故 $|g|'$ 也连续．若定义 $r(0)=0$，则函数 $r(x)$ 在闭区间 $[0,\delta/2]$ 上连续，从而取得最大值 M．于是

$$\int_\varepsilon^x|\varphi(y)||g'(y)|dy=\int_\varepsilon^x\frac{|g(y)|'|r(y)|}{|g'(y)|}\cdot|g'(y)|dy$$

$$\leqslant M\int_\varepsilon^x|g(y)|'dy<M|g(x)|.$$

令 $\varepsilon\to 0$，便知函数 $\int_0^x|\varphi(y)||g'(y)|dy$ 在区间 $(0,\delta/2)$ 上连续且有连续的导函数 $|\varphi||g'|$．因此，函数

$$h_1(x)=\frac{\int_0^x|\varphi(y)||g'(y)|dy}{|g(x)|}$$

满足实值函数的 L'Hospital 法则的条件．应用 L'Hospital 法则到 h_1 上并注意 $|h|\leqslant|h_1|$，便知条件(ii)成立，从而(i)也成立．

(iv)蕴涵(i)．设条件(iv)成立，则对函数 $h(x)$ 的分子分部积分并利用 $|g|$ 的单调性，便得

$$|h(x)|\leqslant|\varphi(x)|+\int_0^x|d\varphi(y)|\,.$$

于是 $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=0$，即条件(ii)成立，从而(i)也成立．

§2.9 凸函数的等价定义

在很多问题中，例如在数学分析、函数论、泛函分析、最优化理论等分支学科中，都需要用到凸函数．这里，我们来介绍凸函数的一些等价定义．

定义 1 设函数 f 在区间 (a,b) 上有定义，且对任意 $x_1,x,x_2\in(a,b)$，$x_1<x<x_2$，恒有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\,,\tag{1}$$

则称 f 是 (a,b) 上的下凸函数．若(1)中的严格不等号成立，则称 f 为 (a,b) 上的严格下凸函数．

定义 2 设函数 f 在区间 (a,b) 上有定义．若对于任意两点 $x_1,x_2\in(a,b)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\,,\tag{2}$$

则称 f 为 (a,b) 上的下凸函数；若(2)中的严格不等号成立，则称 f 为 (a,b) 上的严格下凸函数．

若(1)、(2)中的不等号反向，则称 f 是 (a,b) 上的上凸函数．类似地定义严格上凸性．

注 1 在定义凸函数时，也可将定义 1 和定义 2 中的区间 $(a,$

b)换成闭区间或其它半开区间.

定理 1 若 f 是区间(a,b)上按定义 1 给出的下凸函数,则 f 在(a,b)上必是连续的.

证 任取 $x_0\in(a,b)$,令 $a<x'<x_0<x''<b$. 由定义 1,有

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}\leqslant\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}. \tag{3}$$

易见,当 x' 单增地趋向于 x_0 时,函数

$$g(x')=\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}$$

是非减的;又由(3)式知 $g(x')$是有界的,因此,极限

$$\lim_{x'\to x_0^-}\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}=f'_-(x_0)$$

存在. 类似地可证极限

$$\lim_{x''\to x_0^+}\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}=f'_+(x_0)$$

存在. 即 f 在 x_0 的左、右导数均存在,故 f 在 x_0 必左、右连续,从而 f 在 x_0 连续.

定理 2 按定义 1 的下凸函数必是按定义 2 的下凸函数.

证 对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$,令 $x=(x_1+x_2)/2$,代入(1)式并化简,便得(2)式. 证毕.

可以证明,若 f 在区间(a,b)上连续且是按定义 2 意义下的下凸函数,则它必是按定义 1 意义下的下凸函数. 详言之,我们有下面的定理.

定理 3 设函数 f 在区间(a,b)上有定义,则下列命题彼此互相等价:

(a) 对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$及任意 $\lambda\in(0,1)$,恒有

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

(b) 对任意 $x_i\in(a,b)$及任意 $p_i>0,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}p_i=1$,恒有

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) .$$

(c) 对任意 $x_1, x, x_2 \in (a,b)$，$x_1 < x < x_2$，恒有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} .$$

(d) 对任意 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$，$x_1 < x_2 < x_3$，恒有

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0 .$$

(e) 1°对任意 $x \in (a,b)$，f'_- 与 $f'_+(x)$ 都存在，且 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$；2°对任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，$x_1 < x_2$，都有 $f'_+(x_1) \leqslant f'_-(x_2)$.

(f) 在 (a,b) 上，曲线 $y = f(x)$ 在其每一点处具有不垂直于 x 轴的左、右切线，并且曲线在左、右切线之上.

(g) 在 (a,b) 内存在单增函数 $\varphi(x)$，以及 $x_0 \in (a,b)$，使得对任意 $x \in (a,b)$，恒有

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt .$$

(h) 1°f 在 (a,b) 上连续；2°对任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} .$$

(i) 1°f 在 (a,b) 上连续；2°对任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，$x_1 < x_2$，恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} .$$

(j) 1°f 在 (a,b) 内具有内闭有界性；2°对任意 $x_1, x_2 \in (a,b)$，恒有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} .$$

关于定理 3 的证明，读者可参看[65]及[73].

第三章　积　分

§3.1　导读

在通常的微积分教材中，对 Riemann 积分

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

都强调此极限应与分划 T 的任意性及每个 ξ_i 在小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中选取的任意性无关．对于 Riemann 积分，“分划的任意性”与“ξ_i 选取的任意性”这两个任意性是否都必要呢？§3.2 中的定理 1 说明：若区间 $[a,b]$ 的一列特定分划 $\{T_n \mid a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b\}$ 满足 $\|T_n\|\to 0$ $(n\to\infty)$，则 $[a,b]$ 上的任何函数 f 可积的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n} f(\xi_i)\Delta x_i^{(n)}$ 存在且极限值与每个 ξ_i 在 $[x_{i-1}^{(n)},x_i^{(n)}]$ 中的选取无关．也就是说，Riemann 积分中对分划任意性的要求可去掉．定理 2 说明对有界函数 f，其可积性等价于极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$ 存在且极限值与分划的选取无关．

如所周知，Riemann 积分与 Darboux 积分是等价的．§3.3 的定理 1 说明了对于 Riemann-Stieltjes 积分与 Darboux-Stieltjes 积分，二者并不等价．

微积分基本定理在整个微积分学中起着至关重要的作用，遗憾的是并非所有 Riemann 可积函数都能使这一定理成立，这是 Riemann 积分的一大缺陷．长期以来，人们尝试把 Riemann 积分推广以克服这一不足．这方面已取得了不少成果．§3.4 介绍 Riemann 积分的两种自然且成功的推广：其一是 G 积分，其二是具有重要理论与应用价值的 Henstock 积分．

在 §3.5 中，我们给出积分中值定理的推广，并讨论了积分与

微分中值定理中的中间值的唯一性与渐近性问题．§3.6 介绍通过用一般的周期函数代替正弦函数所得到的 Riemann 引理的成功推广．还介绍 Dirichlet 引理的一个漂亮的推广．§3.7 中的前几个定理说明了几类函数的广义积分可以像常义积分一样，用积分和的极限来表示．本节还给出了几种比较有效的判别广义积分敛散性的方法．§3.8 介绍几种重要积分的计算，并有著名的 Froullani 积分计算公式的推广；还介绍一个 Γ 函数可通过函数方程来确定的定理；最后，以 Riemann 积分可以通过公理形式引入的定理来结束本章．

§3.2 关于 Riemann 积分的定义

3.2.1 历史简述

1823 年，Cauchy 给出了积分的一种定义：设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，若对 $[a,b]$ 的任意分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，当 $\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})\to 0$ 时，和式

$$S_c(T,f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$$

的极限存在，则称 f 在 $[a,b]$ 上可积，并称此极限值为 f 在 $[a,b]$ 上的积分，记作

$$(C)\int_a^b f(x)dx .$$

这种积分后来被称为 Cauchy 积分．

1854 年 Riemann 在《用三角级数来表示函数》一文中，给出了积分的新定义，其中，(i) 去掉了函数 f 在 $[a,b]$ 上连续的要求，只假定 f 在 $[a,b]$ 上有界；(ii) Cauchy 和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$ 被 Riemann 和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$ 代替；(iii) 给出了可积准则：f 在 $[a,b]$ 上可积，当且仅当对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 $[a,b]$ 的任

意分划 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，当 $\|T\|<\delta$ 时，对任意的 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$，均有

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right|<\varepsilon.$$

由于历史上 Riemann 第一个给出在一般情形下定积分的定义，故人们称这种积分为 Riemann 积分.

在 Cauchy 积分中要求 $\|T\|\to 0$ 时，“任意分划”对应的 Cauchy 和都无限逼近同一常数. 而在 Riemann 积分中，要求 $\|T\|\to 0$ 时，必须是在“任意分划”与“任意取法”下各种各样的 Riemann 和都无限逼近同一常数. 关于 Riemann 积分，一般的微积分教科书都强调“分划”与“取法”的任意性. 那么，这两个任意性是否都必要呢？去掉“分划的任意性”，代之以一列特定的分划 $\{T_n\}$，仍保留“取法任意”，是否不改变 Riemann 意义下的可积性？另一方面，保留“分划任意”，而用某种“特定取法”代替“任意取法”是否还能保证 Riemann 可积？特别地，Cauchy 意义下的可积是否意味着 Riemann 可积？下面的两个定理对此作了较详尽的解答.

3.2.2 Riemann 可积的等价形式

定理 1 设 $T_n:a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b$ $(n=1,2,\cdots)$是区间$[a,b]$的一列特定分划，且满足$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n\|=0$. 则$[a,b]$上的函数 f Riemann 可积的充要条件是 Riemann 和

$$\sum_{i=1}^{m_n}f(\xi_i)\Delta x_i^{(n)},\ \xi_i\in[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}],\ \Delta x_i^{(n)}=x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)},$$

当 $n\to\infty$时的极限存在，且极限值不依赖于 ξ_i 在$[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}]$中的选取.

证 必要性显然.

充分性. 由条件用反证法不难验证函数 f 在$[a,b]$上有界. 设 $|f(x)|\leqslant M,x\in[a,b]$. 对$[a,b]$的任一分划 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$，f 与之对应的 Darboux 大和与小和分别记为 $S(T)$与 $s(T)$，即

$$S(T)=\sum_{i=1}^{k}M_i\Delta x_i,\ s(T)=\sum_{i=1}^{k}m_i\Delta x_i,$$

其中 M_i 和 m_i 分别表示 f 在$[x_{i-1},\ x_i]$上的上确界和下确界．对任意的自然数 n，在分划 T_n 下每个小区间$[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}]$中都存在 ξ_i 使得

$$f(\xi_i)\geqslant m_i^{(n)}>f(\xi_i)-\frac{1}{nm_n\Delta x_i^{(n)}}$$

$(i=1,\cdots,m_n)$，所以

$$\sum_{i=1}^{m_n}f(\xi_i)\Delta x_i^{(n)}\geqslant s(T_n)>\sum_{i=1}^{m_n}f(\xi_i)\Delta x_i^{(n)}-\frac{1}{n},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}s(T_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n}f(\xi_i)\Delta x_i^{(n)}$.

同理可得

$$\lim_{n\to\infty}S(T_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{m_n}f(\xi_i)\Delta x_i^{(n)}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}[S(T_n)-s(T_n)]=0.\tag{1}$$

对$[a,b]$的任一分划 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$，记 T' 是把 T 和 T_n 这两个分划合并得到的分划，则 $s(T')\geqslant s(T_n)$，$S(T')\leqslant S(T_n)$．所以有

$$S(T')-s(T')\leqslant S(T_n)-s(T_n).\tag{2}$$

分划 T' 可看成是在 T 的基础上加上 T_n 的至多 m_n-1 个分点得到的分划(区间的端点在两个分划下相同)，所以分划 T 的 k 个小区间中至少有 $k-m_n+1$ 个仍是分划 T' 的小区间．因此 $s(T)$和 $s(T')$中至少有 $k-m_n+1$ 项是相同的，不相同的项在 $s(T)$中至多有 m_n-1 个，而在 $s(T')$中至多可能有 $2(m_n-1)$项(每个新分点在 T' 中对应两个与 T 中小区间不同的小区间)．易知不相同的项所对应的小区间长度都不超过 $\|T\|$．再由 $|f(x)|\leqslant M$ 可得

$$s(T')-s(T)\leqslant 3(m_n-1)M\|T\|.$$

同理可得

$$S(T') - S(T) \geqslant -3(m_n - 1)M \| T \| .$$

所以，

$$S(T) - s(T) \leqslant S(T') - s(T') + 6(m_n - 1)M \| T \| .$$

于是由(2)式得

$$S(T) - s(T) \leqslant S(T_n) - s(T_n) + 6(m_n - 1)M \| T \| . \quad (3)$$

据(1)式，对任意的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N 使得 $S(T_N)-s(T_N)<\varepsilon/2$. 取 $\delta=\varepsilon/12(m_N-1)M$，则当 $\| T \|<\delta$ 时，由(3)式有 $S(T)-s(T)<\varepsilon$. 故

$$\lim_{\| T \| \to 0} [S(T) - s(T)] = 0 .$$

据可积准则知 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积.

特别地，在定理 1 中取 T_n 为 n 等分区间$[a,b]$所对应的分划，便得到下面的推论。

推论 1 函数 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积的充要条件是和式

$$\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i),\ a + (i-1)\frac{b-a}{n} \leqslant \xi_i \leqslant a + i\frac{b-a}{n} ,$$

当 $n\to\infty$时的极限存在且极限值与每个 ξ_i 的选取无关.

推论 1 所给的 Riemann 可积的等价叙述不仅形式简单而且不涉及分划的概念.

定理 1 充分性的证明并没有用到 $\| T_n \| \to 0$ 的条件. 所以去掉 $\| T_n \| \to 0$ 的限制定理 1 的充分性仍成立. 所以，我们有

定理 2 $\{T_n : a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b\}$是区间$[a,b]$的一列特定分划，如果和式

$$\sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i)\Delta x_i^{(n)},\ x_{i-1}^{(n)} \leqslant \xi_i \leqslant x_i^{(n)}$$

当 $n\to\infty$时的极限存在且极限值与 ξ_i 的选取无关，则 f 在$[a,b]$上可积；此外，若还有$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| T_n \| =\lambda>0$，则存在$[a,b]$的一个长度为 λ 的子区间(c,d)使得 f 在(c,d)上取常值.

证 我们只须证明后一部分，由$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \| T_n \| =\lambda$ 知$\{ \| T_n \| \}$有子列收敛于 λ. 不失一般性，不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} \| T_n \| =\lambda$. 设$[x_n,y_n]$是分

划 T_n 的一个长度为 $\|T_n\|$ 的小区间，并令 $M(n)$ 和 $m(n)$ 分别为 f 在 $[x_n, y_n]$ 上的上下确界，则

$$0 \leqslant (M(n) - m(n)) \|T_n\| \leqslant S(T_n) - s(T_n)$$

由定理 1 证明中的(1)式可得 $M(n)-m(n)\to 0$. 由于 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是有界数列，容易验证它们有下标相同的收敛子列．不妨设 $x_n \to c, y_n \to d$，则 $d-c=\lambda$ 且 (c,d) 是 $[a,b]$ 的子区间．对任意的 $x \in (c,d)$ 存在自然数 N 使得 $n \geqslant N$ 时 $x_n < x < y_n$ 且 $x_n < \frac{c+d}{2} < y_n$，所以

$$|f(x) - f(\frac{c+d}{2})| \leqslant M(n) - m(n).$$

令 $n\to\infty$ 得 $f(x)=f(\frac{c+d}{2})$，故 f 在 (c,d) 上取常值．

此定理的几何意义是：采用“以直代曲”的方法求曲边梯形的面积时，如果曲边 $y=f(x)$ 中有一段是直线就不必再“代”了．

已经知道在一般情况下 Riemann 积分与 Cauchy 积分不等价．但当区间 $[a,b]$ 上的函数 f 满足 Riemann 可积的必要条件——f 在 $[a,b]$ 上有界时，便有

定理 3 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界，则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 f 在 $[a,b]$ 上 Cauchy 可积，且积分值相等．

证 必要性显然．

充分性．设 $T_n: a=x_0<x_1<\cdots<x_{2n}=b$ 为 $2n$ 等分 $[a,b]$ 的分划，即 $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2n}$ $(i=1,\cdots,2n)$．由定理 1，只须证明对任何 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i=1,\cdots,2n)$ 都有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{2n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = (C)\int_a^b f(x)dx$$

即可．因 f 在 $[a,b]$ 上 Cauchy 可积，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $[a,b]$ 的任何分划 T，当 $\|T\|<\delta$ 时，就有

$$|S_c(T,f) - (C)\int_a^b f(x)dx| < \varepsilon/12. \qquad (4)$$

取自然数 N 使 $n>N$ 时 $\frac{b-a}{n}<\delta$，对于 $n>N$，在 $2n$ 等分$[a,b]$分划 T_n 的每个小区间$[x_{i-1},x_i]$中任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,2n)$. 考虑分划

$$T_n^{(1)}: x_0,\xi_1,\xi_2,x_2,\xi_3,\xi_4,x_4,\cdots,x_{2n},$$

$$T_n^{(2)}: x_0,\xi_1,\quad x_2,\xi_3,\quad x_4,\cdots,x_{2n}.$$

显然 $\|T_n^{(1)}\|<\delta$，$\|T_n^{(2)}\|<\delta$，由(4)可得

$$S_c(T_n^{(2)},f)-S_c(T_n^{(1)},f)=\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_{2i-1})-f(\xi_{2i})](x_{2i}-\xi_{2i})$$
$$=\rho_1, \tag{5}$$

式中 $|\rho_1|<\frac{2\varepsilon}{12}$. 类似地，考虑分划

$$T_n^{(3)}: x_0,x_1,\xi_2,\xi_3,x_3,\xi_4,\xi_5,x_5,\cdots,x_{2n-1},x_{2n},$$

$$T_n^{(4)}: x_0,x_1,\xi_2,\quad x_3,\xi_4,\quad x_5,\cdots,x_{2n-1},\ x_{2n}.$$

就得到

$$\sum_{i=1}^{n-1}[f(\xi_{2i})-f(\xi_{2i+1})](x_{2i+1}-\xi_{2i+1})=\rho_2, \tag{6}$$

式中 $|\rho_2|<\frac{2\varepsilon}{12}$. (5)加(6)得

$$\sum_{i=2}^{2n}[f(\xi_{i-1})-f(\xi_i)](x_i-\xi_i)=\rho_3,$$

式中 $|\rho_3|=|\rho_1+\rho_2|<\frac{4\varepsilon}{12}$. 上式可改写为

$$\sum_{i=1}^{2n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-\xi_{i+1})-\sum_{i=2}^{2n}f(\xi_i)(x_i-\xi_i).$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)-\sum_{i=1}^{2n-1}f(\xi_i)(\xi_{i+1}-x_i)-$$
$$\sum_{i=2}^{2n}f(\xi_i)(x_i-\xi_i)=\rho_3.$$

注意到 $x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{2n}$ $(i=1,2,\cdots,2n)$得

$$\sum_{i=1}^{2n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\sum_{i=2}^{2n-1}f(\xi_i)(\xi_{i+1}-\xi_i)+\rho_4=\rho_3. \tag{7}$$

式中 ρ_4 是三项之和，每一项的绝对值都不超过 $\frac{M(b-a)}{N}$，$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$，取 N 足够大使 $\frac{M(b-a)}{N}<\frac{\varepsilon}{12}$，则 $|\rho_4|<\frac{3\varepsilon}{12}$. 考虑分划

$$T_n^{(5)}: x_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{2n}, x_{2n}.$$

显然 $\|T_n^{(5)}\|<\delta$，由式(4)

$$f(x_0)(\xi_1-x_0)+\sum_{i=1}^{2n-1}f(\xi_i)(\xi_{i+1}-\xi_i)+f(\xi_{2n})(x_{2n}-\xi_{2n})$$
$$=(\mathrm{C})\int_a^b f(x)dx+\rho_5.$$

式中 $|\rho_5|<\frac{\varepsilon}{12}$，所以

$$\sum_{i=2}^{2n-1}f(\xi_i)(\xi_{i+1}-\xi_i)=(\mathrm{C})\int_a^b f(x)dx+\rho_5+\rho_6. \tag{8}$$

式中 ρ_6 是三项之和且每一项都不大于 $\frac{M(b-a)}{N}<\varepsilon$，所以 $|\rho_6|<\frac{3\varepsilon}{12}$. (8)代入(7)得

$$\sum_{i=1}^{2n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-(\mathrm{C})\int_a^b f(x)dx=\rho_3-\rho_4-\rho_5-\rho_6$$

由于 $n>N$ 时 $|\rho_3-\rho_4-\rho_5-\rho_6|<\frac{11}{12}\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{2n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=(\mathrm{C})\int_a^b f(x)dx.$$

3.2.3 评注

定理 1 和定理 2 是新的，定理 1 的特殊情况——推论 1 是由叶怀安[21]给出的. 定理 3 参看文献[89]. 定理 3 中的条件“f 在 $[a,b]$ 上有界”用“f 在 $[a,b]$ 上不变号”代替，结论仍成立. 与定理 3 相关的可考虑下面更具一般性的问题：f 在 $[a,b]$ 上有界，θ 是 $[0,1]$ 中的一个常数. 对任何分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，如果 $\|T\|\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_{i-1}+\theta\Delta x_i)\Delta x_i$ 的极限存在且极限值与分划 T 无关，那么 f 在 $[a,b]$ 上是否可积？进一步地，f 在 $[a,b]$

上可积是否等价于如下的事实：对$[a,b]$的任何分划$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$及任意的$\theta\in[0,1]$，$\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_{i-1}+\theta\Delta x_i)\Delta x_i$存在且极限值与分划$T$及$\theta$在$[0,1]$中的选取无关．有兴趣的读者可考虑之．

§3.3 关于 Stieltjes 积分的定义

我们先回顾一下 Riemann 积分的经典定义．

定义 1 设f是区间$[a,b]$上的有界函数．任取$[a,b]$的分划$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，令$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$，并任取$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$．若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I$$

存在，且极限值I不依赖于$[a,b]$的分划及ξ_i的取法，则称f在$[a,b]$上 Riemann 可积或(R)可积，称I为f在$[a,b]$上的 Riemann 积分或(R)积分，记为

$$I=\int_a^b f(x)dx \quad 或 \quad I=(\mathrm{R})\int_a^b f(x)dx\ .$$

定义 2 设f是区间$[a,b]$上的有界函数．对$[a,b]$的分划T，令$M_i=\sup\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x)$，$m_i=\inf\limits_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i}f(x)$，并分别称

$$S(T,f)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\ s(T,f)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

为f关于T的 Darboux 大和与 Darboux 小和．令

$$\overline{\int_a^b}f(x)dx=\inf_T S(T,f), \tag{1}$$

$$\underline{\int_a^b}f(x)dx=\sup_T s(T,f), \tag{2}$$

其中下确界与上确界是对$[a,b]$的所有分划T取的．(1)，(2)的左端分别叫做f在$[a,b]$上的上、下 Darboux 积分．若上、下 Darboux 积分相等，则称f在$[a,b]$上 Darboux 可积，其公共值称为f

在$[a,b]$上的 Darboux 积分，记作

$$(\mathrm{D})\int_a^b f(x)dx .$$

可以证明，f 在$[a,b]$上 Riemann 可积的充要条件是 f 在$[a,b]$上 Darboux 可积，且积分值相等，即

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)dx = (\mathrm{D})\int_a^b f(x)dx .$$

现在引入 Stieltjes 积分的概念．

定义 3 设 f 是区间$[a,b]$上的有界函数，φ 是$[a,b]$上的单增函数．对$[a,b]$的任意分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，令 $\Delta\varphi_i=\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})$．任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，若极限

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta\varphi_i = I$$

存在，且极限值 I 与分划 T 及 ξ_i 的选取无关，则称 f 在$[a,b]$上关于 φ 是 Riemann-Stieltjes 可积的或称(R-S)可积的，而称 I 为 f 在$[a,b]$上关于 φ 的 Riemann-Stieltjes 积分，或称(R-S)积分，记作

$$I = (\mathrm{R\text{-}S})\int_a^b f(x)d\varphi(x) .$$

定义 4 设 f 是区间$[a,b]$上的有界函数，φ 是$[a,b]$上的单增函数．对 $[a,b]$ 的每个分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 $\Delta\varphi_i=\varphi(x_i)-\varphi(x_{i-1})$．令

$$S(T,f,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\varphi_i,\ s(T,f,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\varphi_i.$$

这里 M_i, m_i 与定义 2 中的含义相同，并令

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \inf_T S(T,f,\varphi) , \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x) = \sup_T s(T,f,\varphi) . \tag{4}$$

若(3)与(4)的左端相等，其公共值记为

$$I = (\mathrm{D\text{-}S})\int_a^b f(x)d\varphi(x) ,$$

并称 I 为 f 在$[a,b]$上关于 φ 的 Darboux-Stieltjes 积分，或称(D-

S)积分.

我们在前面已经指出,f 在$[a,b]$上 Riemann 可积当且仅当 f 在$[a,b]$上 Darboux 可积,且积分值相等. 基于这一事实,我们自然要问:f 在$[a,b]$上(R-S)可积与 f 在$[a,b]$上(D-S)可积,这两个概念是否等价?

下面的定理 1 回答了这个问题.

定理 1 若函数 f 在区间$[a,b]$上关于函数 φ 是(R-S)可积的,则其亦必关于 φ 是(D-S)可积的,且积分值相等.

定理的证明可参看文献[187].

应当注意,定理 1 之逆不真. 例如,设

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 2, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}\qquad \varphi(x)=\begin{cases}3, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 4, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$$

易知,f 在$[0,1]$上关于 φ 并不(R-S)可积,但它在$[0,1]$上关于 φ 是(D−S)可积的.

下面,我们仅用单减闭区间列之交必非空这一基本事实来证明下面的定理.

定理 2 若函数 f 在区间$[a,b]$上正值且有界,φ 在$[a,b]$上非常值且是单增的函数,则 Darboux-Stieltjes 上积分 $\int_a^b f(x)d\varphi(x)>0$.

先证明下面的引理.

引理1 设函数 f 在区间$[a,b]$上有界,φ 是$[a,b]$上不恒等于常数的单增函数,且 $\int_a^b f(x)d\varphi(x)=0$,则对任意 $\varepsilon>0$,存在子区间$[c,d]\subset[a,b]$,使得 $\sup\limits_{c\leqslant x\leqslant d} f(x)<\varepsilon$.

证 因 φ 不是常值函数,故 $\varphi(b)-\varphi(a)>0$. 由于

$$0=\int_a^b f(x)d\varphi(x)=\inf_T S(T,f,\varphi),$$

故存在$[a,b]$的分划 T,使得

$$S(T,f,\varphi)<\varepsilon[\varphi(b)-\varphi(a)].$$

由此可知，存在某个 i，使

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)<\varepsilon.$$

因此，$[x_{i-1},x_i]$即为所求的子区间$[c,d]$.

引理2 若函数 f 在区间$[a,b]$上非负有界，φ是$[a,b]$上不恒等于常数的单增函数，且 $\int_a^b f(x)d\varphi(x)=0$，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$.

证 由引理1知，对 $\varepsilon=1$有子区间$[a_1,b_1]\subset[a,b]$，使得 $\sup\limits_{a_1\leqslant x\leqslant b_1} f(x)<1$.

由于 $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\varphi(x)dx=0$，故再由引理1知，对 $\varepsilon=\frac{1}{2}$有子区间$[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，使得 $\sup\limits_{a_2\leqslant x\leqslant b_2} f(x)<\frac{1}{2}$.

如此继续下去，得闭区间列$\{[a_n,b_n]\}$，$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，使得 $\sup\limits_{a_n\leqslant x\leqslant b_n} f(x)<\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$.

由于 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\neq\varnothing$，故存在 ξ 使 $a_n\leqslant\xi\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，从而

$$f(\xi)\leqslant\sup_{a_n\leqslant x\leqslant b_n} f(x)<\frac{1}{n}.$$

由此可知 $f(\xi)\leqslant 0$. 因 f 非负，故 $f(\xi)=0$.

推论1 设函数 f 在区间$[a,b]$上非负有界，$\varphi(x)=x$ 且 $\int_a^b f(x)d\varphi(x)=0$，则 f 的零点所成之集在$[a,b]$中稠密.

定理2的证明. 设定理2的结论不成立，即

$$\int_a^b f(x)d\varphi(x)=0,$$

则由引理2，存在$\xi\in[a,b]$使 $f(\xi)=0$，这与定理2的假设 f 恒正发生矛盾. 定理证毕.

注1 定理2的上述证法选自文献[170].

§3.4 两种推广的 Riemann 积分

3.4.1 微积分基本定理

微积分基本定理是微积分中至关重要的一个定理.这个定理可叙述如下:

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积,且 f 在 $[a,b]$ 上有原函数 F,即对每一 $x\in[a,b]$,$F'(x)=f(x)$,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

本定理中的条件可适当减弱,比如,我们可以用右导数

$$F'_+(x) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

或 Schwarz 导数

$$F^s(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

来代替 $F'(x)$.

定理1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积,函数 F 在 $[a,b]$ 上连续,使对每一 $x\in(a,b)$ 有 $F'_+(x)=f(x)$,则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

证 对 $[a,b]$ 作任意分划 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,显然

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})] \tag{1}$$

对每个 $I_k=[x_{k-1},x_k]$,据 Knight[142] 的一个结果,存在 $c_k,d_k\in(x_{k-1},x_k)$,使得

$$F'_+(c_k) \leqslant \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leqslant F'_+(d_k) . \tag{2}$$

因对任意 $x\in(a,b)$ 有 $F'_+(x)=f(x)$,故

$$f(c_k) \leqslant \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leqslant f(d_k) ,$$

从而

$$m_k \leqslant \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leqslant M_k,$$

式中 $m_k = \inf\limits_{x \in I_k} f(x)$，$M_k = \sup\limits_{x \in I_k} f(x)$. 两端乘以 $x_k - x_{k-1}$ 后求和，并利用(1)便得

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

由于分划 T 是任意的及 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，上式意味着

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

例1 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

计算 $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

解 因 f 在$[-1,1]$上没有介值性质，故 f 在$[-1,1]$上没有原函数. 然而，函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + 3x, & x \geqslant 0, \\ -\frac{x^2}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

在$[-1,1]$上连续且对 $x \in (-1,1)$，显然有 $F'_+(x) = f(x)$，故由定理1得

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = F(1) - F(-1) = \frac{23}{6}.$$

定理2 设函数 f 在区间$[a,b]$上 Riemann 可积，函数 F 在$[a,b]$上连续，使对任意 $x \in (a,b)$有 $F'(x) = f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

定理2的证明与定理1相仿，这里不再赘述.

例2 计算 $\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn} x dx$.

解 令 $F(x) = |x|$，则显然有 $F'(x) = \operatorname{sgn} x$. 由定理2得

$$\int_{-1}^{2}\operatorname{sgn}x\,dx = F(2) - F(-1) = 1 .$$

3.4.2 函数的可积性与存在原函数之间的关系

若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有原函数 F，即 $F'=f$，且 f 在 $[a,b]$ 上(R)可积，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

一般说来，(R)可积的函数未必存在原函数，而有原函数的函数未必(R)可积.

例3 没有原函数的(R)可积函数.

设

$$f(x) = \begin{cases} 0 , & -1 \leqslant x < 0 , \\ 1 , & 0 \leqslant x \leqslant 1 . \end{cases}$$

易见，f 在闭区间 $[-1,1]$ 上(R)可积. 然而，f 在 $[-1,1]$ 上没有原函数. 事实上，如果 f 在 $[-1,1]$ 上有原函数 F，即 $F'(x)=f(x)$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$，那么，由 Darboux 定理可知，$F'$ 应取得 $F'(-1)=0$ 与 $F'(1)=1$ 之间的每一个值，即 f 应取得 $f(-1)=0$ 与 $f(1)=1$ 之间的每一个值，此与 f 的定义相矛盾. 因此，f 在 $[-1,1]$ 上没有原函数.

例4 有原函数但不(R)可积的函数. 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0 , & x = 0, \end{cases}$$

则 f 在 $[-1,1]$ 的每一点 x 处都有有限导数

$$g(x) = f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^2}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 , \\ 0 , & x = 0 . \end{cases}$$

因此，函数 g 有原函数 f. 但是，由于 g 在区间 $[-1,1]$ 上无界，因而它在 $[-1,1]$ 上并不(R)可积.

例4中的函数 g 是无界的，于是便产生问题：是否存在在闭区

间上具有原函数而不(R)可积的有界函数?这个问题的答案是肯定的,Volterra[188]有例如下:

从闭区间[0,1]中去掉其中间的长度1/4的开区间.然后从剩下来的两个闭区间中各去掉其中间的长度为$1/4^2$的开区间.在第n步,从第$n-1$步剩下来的2^{n-1}个闭区间中各去掉其中间的长度为$1/4^n$的开区间.无限地继续这个过程,我们从区间[0,1]内去掉了一列总长度为

$$\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{1}{2}$$

的开区间,剩下来的点形成闭集E,显然,E不是零测度集.设d_n表示第n步后剩下的各个闭区间的长度.从这个构造方法,显然,$d_{n+1}<d_n/2$;因此$n\to\infty$时$d_n\to 0$.这说明[0,1]的子区间不管多么小,都不能整个地含于集E.

现在我们定义函数f.对$x\in E$,令$f(x)=0$.若(α,β)是去掉的开区间之一,则紧接着α的右边定义

$$f(x)=(x-\alpha)^2\sin\frac{1}{x-\alpha},$$

紧接着β的左边定义

$$f(x)=(x-\beta)^2\sin\frac{1}{\beta-x},$$

直至达到最靠近(α,β)中间的极大值$\bar{\alpha},\bar{\beta}$;在区间$(\bar{\alpha},\bar{\beta})$内,规定$f(x)$等于这个极大值.

这样,我们在整个区间[0,1]上定义了函数f,它是连续函数.

显然,f在去掉的各个区间(α,β)内可微,即使在$\bar{\alpha},\bar{\beta}$处也是如此,在这两个点的导数是0.对充分接近α的$x(x>\alpha)$,我们有

$$f'(x)=2(x-\alpha)\sin\frac{1}{x-\alpha}-\cos\frac{1}{x-\alpha};$$

若$x\to\alpha$,右端的第一项趋于0,而第二项在+1与-1之间振动.在β的左邻域内情况类似.

在点α,β处,甚至在每个点$x_0\in E$处$f'(x_0)$都存在,并且

$$f'(x_0)=0. \tag{3}$$

为证明这一点，先设 $x>x_0$. 若 $x\in E$，则

$$f(x)-f(x_0)=0-0=0;$$

若 x 含于某个被去掉的区间(α,β)内，则

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|\leqslant(x-\alpha)^2\leqslant(x-x_0)^2;$$

因此，无论什么时候都有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leqslant|x-x_0|.$$

$x<x_0$时仍然如此. 令 $x\to x_0$，便得(3).

这样，$f'(x)$处处存在，但它在 E 上不连续. 事实上，若 $x_0\in E$，则在 x_0的每个邻域内存在被去掉的区间的点，因而也存在被去掉的区间之一的端点；但我们知道：在这样的端点处，函数 f'的振幅等于2. 由于 E 不是零测度集，因此，f'不可能(R)可积.

注1 若 f 在$[a,b]$上有原函数 F，则称 f 在$[a,b]$上是 Newton 可积的，简称为(N)可积的，并称 $F(b)-F(a)$为 f 在$[a,b]$上的 Newton 积分，简称(N)积分，记作 $(N)\int_a^b f(x)dx$，即

$$(N)\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

如果 f 在$[a,b]$上是(N)可积的，即 f 有原函数 F 存在，且 f 是(R)可积的，那么这两种可积意义是等价的，且积分值是相等的即

$$(N)\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=(R)\int_a^b f(x)dx.$$

这就是著名的微积分基本公式. 例3与例4说明了在一般情况下这两类积分并不等价.

例5 令 $D(x)=\begin{cases}1,&x\text{ 为有理数},\\0,&x\text{ 为无理数},\end{cases}$

则函数 D 在任何区间$[a,b]$上既非(N)可积，亦非(R)可积.

例6 设区间$[a,b]$上的有理数的全体为 $r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$，令

$$D_n(x)=\begin{cases}1,&x=r_1,r_2,\cdots,r_n,\\0,&\text{其它},\end{cases}$$

则每个 D_n 在$[a,b]$上都是(R)可积的，且对每一 $x\in[a,b]$都有 $\lim\limits_{n\to\infty}D_n(x)=D(x)$，但 D 并不(R)可积.

例7 设 $f_n(x)=x^{\frac{1}{2n+1}}$，$x\in[-1,1]$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\operatorname{sgn}x$. 显然，$f_n$ 在$[-1,1]$上是(N)可积的，但 $\operatorname{sgn}x$ 并不(N)可积.

例5至例7说明了(N)积分与(R)积分都不够广泛，而且对于极限运算均不封闭. 因此，人们希望建立一种积分，它使可积函数的范围更大，而性质更加完善.

Lebesgue 提出了而今以他的名字命名的积分(简称(L)积分)推广了(R)积分. 但是，由于(L)积分是一种绝对收敛积分，因而它未完全包括广义(R)积分与(N)积分，也没有完全解决由函数的有穷导数求其原函数的问题. 下面，我们给出 Riemann 积分的两种较自然的推广，它们都比 Newton 积分，Lebesgue 积分广泛，而且完全解决了由函数的有穷导数求其原函数的问题.

3.4.3 Riemann 积分的几种推广

1. G 积分

设 f 是区间$[a,b]$上的有界函数，$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ 是$[a,b]$的任一分划，M_i 和 m_i 分别是 f 在$[x_{i-1},x_i]$上的上确界和下确界. $S_f(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$ 和 $s_f(T)=\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$ 分别是 f 在分划 T 下的大和与小和. 做一$[a,b]$上的连续折线 U，使得 U 在$[x_{i-1},x_i]$上为直线段且斜率为 $M_i(i=1,2,\cdots,n)$，即

$$U(x)=\begin{cases}M_1x+C_1, & a\leqslant x\leqslant x_1,\\ M_2x+C_2, & x_1<x\leqslant x_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ M_nx+C_n, & x_{n-1}<x\leqslant x_n.\end{cases}$$

这里 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 这样选择：使得 $U(a)=0$，且 U 在$[a,b]$上连续. 当 $x_{i-1}<x<x_i$ 时，$U'(x)=M_i$，故除了 $[a,b]$ 上的有限个点外有 $U'(x)\geqslant f(x)$. 显然，

$$S_f(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=U(b)-U(a)=U(b)\ .$$

定义1 设 f 和 U 是区间$[a,b]$上的实值函数. 如果

(i) $U(a)=0$且 U 在$[a,b]$上连续;

(ii) 除了$[a,b]$上的有限个点外,有 $U'(x)\geqslant f(x)$,

则称 U 是 f 在$[a,b]$上的一个上函数.

显然,$[a,b]$上的每一有界函数 f 的大和都是 f 的某一上函数在 b 处的函数值.

类似地,可以引入下函数的概念.

定义2 设 f 和 L 是区间$[a,b]$上的实值函数. 如果

(i) $L(a)=0$且 L 在$[a,b]$上连续;

(ii) 除了$[a,b]$上的有限个点外,有 $L'(x)\leqslant f(x)$,

则称 L 是 f 在$[a,b]$上的一个下函数.

区间$[a,b]$上的每个有界函数 f 的小和都是 f 的某一下函数在 b 处的函数值.

引理1 若 U 和 L 分别是函数 f 在区间$[a,b]$上的上函数与下函数,则 $U(b)\geqslant L(b)$.

证 令 $D(x)=U(x)-L(x)$,$a\leqslant x\leqslant b$,则函数 D 在$[a,b]$上连续,且除了$[a,b]$中有限个点外 $D'(x)=U'(x)-L'(x)\geqslant 0$,所以 D 是$[a,b]$上的单增函数,从而

$$D(b)\geqslant D(a)=U(a)-L(a)=0\ ,$$

即 $U(b)\geqslant L(b)$. 证毕.

记 $\mathscr{A}=\{U(b)\mid U$ 是 f 的上函数$\}$,$\mathscr{B}=\{L(b)\mid L$ 是 f 的下函数$\}$. 定义

$$(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx=\begin{cases}\inf\mathscr{A}, & \mathscr{A}\neq\varnothing,\\ +\infty, & \mathscr{A}=\varnothing,\end{cases}$$

$$(\mathrm{G})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx=\begin{cases}\sup\mathscr{B}, & \mathscr{B}\neq\varnothing,\\ -\infty, & \mathscr{B}=\varnothing.\end{cases}$$

$(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx$ 与 $(\mathrm{G})\int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$ 分别被称为函数 f 在区间$[a,b]$上的上 G 积分与下 G 积分.

定义3 若(G)$\overline{\int_a^b} f(x)dx = (\mathrm{G})\underline{\int_a^b} f(x)dx$ 相等且为有限值，则称函数 f 在区间$[a,b]$上 G 可积，f 的上 G 积分与下 G 积分的公共值，称为 f 在$[a,b]$上的 G 积分，记作(G)$\int_a^b f(x)dx$.

定理3 若函数 f 在区间$[a,b]$上 Riemann 可积，则 f 必在$[a,b]$上 G 可积，且

$$(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

证 记 $\mathscr{A}' = \{S_f(T) \mid T$ 是$[a,b]$的分划$\}$，$\mathscr{B}' = \{s_f(T) \mid T$ 是$[a,b]$的分划$\}$，则 $\mathscr{A}' \subset \mathscr{A}$，且 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$，因此

$$\inf\mathscr{A}' \geqslant (\mathrm{G})\overline{\int_a^b} f(x)dx ,$$

$$\sup\mathscr{B}' \leqslant (\mathrm{G})\underline{\int_a^b} f(x)dx .$$

因 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，故由 Riemann 可积准则知

$$\inf\mathscr{A}' = \sup\mathscr{B}' = \int_a^b f(x)dx .$$

综上可知，f 在$[a,b]$上 G 可积，且

$$(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx .$$

定理4 设函数 F 在区间$[a,b]$上连续且除了$[a,b]$中的有限个点外有 $F'(x)=f(x)$，则 f 在$[a,b]$上(G)可积，且

$$(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

证 先设 $F(a)=0$. 因 F 连续，且除了$[a,b]$中的有限个点外，有 $F'(x)\geqslant f(x)\geqslant F'(x)$，故 F 既是 f 在$[a,b]$上的上函数，又是 f 在$[a,b]$上的下函数. 于是

$$F(b) \leqslant (\mathrm{G})\underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant (\mathrm{G})\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant F(b) .$$

可见 f 在$[a,b]$上是 G 可积的，且

$$(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx = F(b) .$$

若 $F(a)\neq 0$，则令 $H(x)=F(x)-F(a)$. 应用上述结果到函数 H，便得所需的结论.

例8 考虑函数

$$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

则

$$F'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

显然，F' 在 $[a,b]$ 上无界. 而且 F' 在 $[0,1]$ 上并不 Lebesgue 可积. 由定理4，F' 在 $[0,1]$ 上 G 可积. 这样我们得到一个在 $[0,1]$ 上无界也不 Lebesgue 可积，但却 G 可积的函数.

定理5 设函数 f 是区间 $[a,b]$ 上的实值函数，则 f 在 $[a,b]$ 上 G 可积的充要条件是对任意 $\varepsilon>0$，存在 f 在 $[a,b]$ 上的上函数 U 及下函数 L，使得

$$U(b)-L(b)<\varepsilon.$$

其证明类似于 Riemann 积分中相应的定理.

定理6 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 G 可积，$a<c<b$，则 f 在 $[a,c]$ 与 $[c,b]$ 上也都 G 可积，且

$$(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx=(\mathrm{G})\int_a^c f(x)dx+(\mathrm{G})\int_c^b f(x)dx.$$

定理7 若函数 f 与 g 在区间 $[a,b]$ 上都是 G 可积的，且 k 是常数，则

(a) kf 在 $[a,b]$ 上 G 可积，且

$$(\mathrm{G})\int_a^b kf(x)dx=k(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx.$$

(b) $f+g$ 在 $[a,b]$ 上 G 可积，且

$$(\mathrm{G})\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=(\mathrm{G})\int_a^b f(x)dx+(\mathrm{G})\int_a^b g(x)dx.$$

(c) 若除了 $[a,b]$ 中的有限个点外，有 $f(x)\leqslant g(x)$，则

$$(G)\int_a^b f(x)dx \leqslant (G)\int_a^b g(x)dx .$$

定理6与定理7的证明可由定义或定理5推得.

定理8 设 f 在$[a,b]$上 G 可积. 令

$$F(x) = (G)\int_a^x f(t)dt ,$$

则 F 在$[a,b]$上连续,且当 f 在 x_0点连续时,有 $F'(x_0)=f(x_0)$.

证 对任意的自然数 n,由定理5存在 f 在$[a,b]$上的上函数 U_n 与下函数 L_n,使得 $U_n(b)-L_n(b)<\frac{1}{n}$,由于 U_n-L_n 是单增函数,所以对任意的 $x\in[a,b]$,有 $U_n(x)-L_n(x)<\frac{1}{n}$. 因此,对任意的 $x\in[a,b]$有

$$L_n(x) \leqslant (G)\int_a^x f(t)dt \leqslant U_n(x) ,$$

故

$$0 \leqslant U_n(x) - (G)\int_a^x f(t)dt < \frac{1}{n} .$$

由此知函数列$\{U_n\}$在$[a,b]$上一致收敛于 F,所以 F 在$[a,b]$上连续. 当 f 在 x_0点连续时,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得$|t-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

即 $f(x_0)-\varepsilon<f(t)<f(x_0)+\varepsilon$. 由定理6,

$$F(x) = F(x_0) + (G)\int_{x_0}^x f(t)dt .$$

据定理7的 (C) 得$(G)\int_{x_0}^x f(t)dt$ 介于$(f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)$ 与 $(f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0)$ 之间. 所以,当 $|x-x_0|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon,$$

即 $F'(x_0)=f(x_0)$.

2. Henstock 积分

Riemann 积分可以用"ε-δ"语言表述为:设有定数 I,对任意的

$\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任意的分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，不管 ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中如何选取，只要 $\|T\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon, \tag{4}$$

则称 I 是 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分.

(4)式与分划 T 加细的方式无关，也与 ξ_i 在 $[x_{i-1},x_i]$ 中的选取无关，这两个无关性实际上是一致性，而且是较强的一致性. 单就绝对值 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|$ 来说，可以想象，对某些区间 $[x_{i-1},x_i]$，当 x 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上变动而相应的函数值 $f(x)$ 变化不大时，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，上面的绝对值将不会有大的变化，但对另一些区间 $[x_{i-1},x_i]$，若 x 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上变动时，函数值 $f(x)$ 有较大的变化，在 $[x_{i-1},x_i]$ 中选取不同的 ξ_i 就会导致上面的绝对值有较大变化，因此，为使 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|$ 任意小，而一味地要求所有 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度都小于同一个常数 δ，这是使 Riemann 可积函数类不够广泛的一个重要原因. 为了克服这种局限，一个自然的想法是：使 ξ_i 与 $[x_{i-1},x_i]$ 相适应，适当地选取 $\delta(\xi)$ 以达到减弱“一致性”的目的.

定义4 称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Henstock 可积(简称(H)可积)，是指存在定数 I，使得对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $[a,b]$ 上的正值函数 $\delta(x)$，对 $[a,b]$ 的任意分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，只要 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 满足 $[x_{i-1},x_i]\subset(\xi_i-\delta(\xi_i),\xi_i+\delta(\xi_i))$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon.$$

此时称 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的(H)积分，记为

$$(\mathrm{H})\int_a^b f(x)dx = I.$$

对于 $[a,b]$ 上每一正值函数 $\delta(x)$，一定存在分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，及 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 使得 $[x_{i-1},x_i]\subset(\xi_i-\delta(\xi_i),\xi_i+$

$\delta(\xi_i))$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

在定义4中，如果对每一 $\varepsilon>0$，与之相应的正值函数 $\delta(x)$ 是常值函数. 则(H)积分就是 Riemann 积分.

首先，我们要把微积分基本定理推广到(H)积分，为此，需要下面的引理.

引理2 设区间 $[a,b]$ 上的函数 F 在点 $x\in[a,b]$ 可导，则对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(x)>0$，当 $u\leqslant x\leqslant v$ 且 $[u,v]\subset[a,b]\cap(x-\delta(x),x+\delta(x))$ 时，就有

$$|F(v)-F(u)-F'(x)(v-u)|\leqslant\varepsilon(v-u).$$

证 因 F 在 x 可微，故存在 $\delta(x)>0$，当 $0<|x-z|<\delta, z\in[a,b]$ 时，就有

$$\left|\frac{F(z)-F(x)}{z-x}-F'(x)\right|<\varepsilon.$$

若 $x=u$ 或 $x=v$，则结论自明. 下设 $u<x<v$，此时有

$$\begin{aligned}&|F(v)-F(u)-F'(x)(v-u)|\\ \leqslant\ &|F(v)-F(x)-F'(x)(v-x)|+\\ &|F(x)-F(u)-F'(x)(x-u)|\\ <\ &\varepsilon(v-x)+\varepsilon(x-u)=\varepsilon(v-u).\end{aligned}$$

定理9(微积分基本定理) 若函数 F 在区间 $[a,b]$ 上可导，则 F' 在 $[a,b]$ 上(H)可积，且

$$(\mathrm{H})\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a).$$

证 任给 $\varepsilon>0$，对 $x\in[a,b]$，设 $\delta(x)>0$ 为引理2中所述. 任取 $[a,b]$ 的分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，及 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，使

$$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\subset(\xi_i-\delta(\xi_i),\xi_i+\delta(\xi_i)).$$

D 据引理2，有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^n F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-[F(b)-F(a)]\right|\\ =\ &\left|\sum_{i=1}^n\{F'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-[F(x_i)-F(x_{i-1})]\}\right|\end{aligned}$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b-a) ,$$

故

$$(\mathrm{H}) \int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) .$$

下面的定理10是定理9的推广.

定理10 设 F 和 f 是区间$[a,b]$上的两个函数，F 在$[a,b]$上连续且除了可数个点外 F 在$[a,b]$上可积. 若在 F 的每个可微点 x 处有 $f(x)=F'(x)$，则 f 在$[a,b]$上(H)可积，且

$$(\mathrm{H}) \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) .$$

证 设 F 在$[a,b]$上不可微的点组成之集为 Q，则 Q 为一可数集：$Q=\{z_i \mid i=1,2,\cdots\}$. 对任意 $\varepsilon>0$，若 $x \notin Q$，则定义 $\delta(x)$ 如引理2中所述；若 $z_i \in Q$，则取 $\delta(z_i)>0$ 使 $|f(z_i)|2\delta(z_i)<\varepsilon/2^{i+2}$，且当 $|h|<\delta(z_i)$ 时，有

$$|F(z_i) - F(z_i+h)| < \varepsilon/2^{i+3}$$

(因 F 连续，故上述 $\delta(z_i)$ 是存在的). 对区间$[a,b]$的任何分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，及任意的 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$，当 $[x_{i-1},x_i] \subset (\xi_i-\delta(\xi_i),\xi_i+\delta(\xi_i))$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 时，有

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(b) - F(a)] \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^{n} \{f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - [F(x_i) - F(x_{i-1})]\} \right| \\ &= \sum{}' + \sum{}'' , \end{aligned} \tag{5}$$

式中 $\sum'$ 表示对 $\xi_i \notin Q$ 的下标 i 求和，而 $\sum''$ 表示对 $\xi_i \in Q$ 的下标 i 求和. 如同定理1的证明一样，有 $|\sum'|<\varepsilon(b-a)$. 对于 $\sum''$，若 $\xi_i=z_j$，则有

$$|f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})| \leqslant |f(z_j)|2\delta(z_j) < \frac{\varepsilon}{2^{i+2}} ,$$

且

$$
\begin{aligned}
&|F(x_i)-F(x_{i-1})| \\
&\leqslant |F(x_j)-F(z_j)|+|F(z_j)-F(x_{i-1})| \\
&< \frac{2\varepsilon}{2^{j+3}}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\sum{}'' \leqslant 2\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{j+2}}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{j+2}}\right)=\varepsilon.
$$

上式中之所以出现因子2，是因为每个 z_j 至多同时属于两个(相邻的)子区间.

综上所述，(5)式小于 $\varepsilon(b-a)+\varepsilon$，故

$$
(\mathrm{H})\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).
$$

关于 Henstock 积分还有如下重要定理：

定理11 若函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上几乎处处相等(简记为 a. e.)，则 f 在 $[a,b]$ 上(H)可积时，g 在 $[a,b]$ 上也(H)可积，且

$$
(\mathrm{H})\int_a^b f(x)dx = (\mathrm{H})\int_a^b g(x)dx.
$$

定理12 若函数 f 在区间 $[a,b]$ 上(H)可积，则 $F(x)=(\mathrm{H})\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上连续.

定理13 若 f 和 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上都(H)可积，则 $F(x)=(\mathrm{H})\int_a^x f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上绝对连续.

定理14 f 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积的充分必要条件是 f 和 $|f|$ 都在 $[a,b]$ 上(H)可积，且此时有

$$
(\mathrm{L})\int_a^b f(x)dx = (\mathrm{H})\int_a^b f(x)dx.
$$

定理15 若下列条件成立：

(i) $f_n(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上(H)可积，$f_n \to f$ a. e. 于 $[a,b]$；

(ii) g,h 在 $[a,b]$ 上(H)可积，且对每一自然数 n，$g \leqslant f_n \leqslant h$，a. e. 于 $[a,b]$，

则 f 在 $[a,b]$ 上也(H)可积，且有

$$\lim_{n\to\infty}(\mathrm{H})\int_a^b f_n(x)dx = (\mathrm{H})\int_a^b f(x)dx\ .$$

以上定理的证明及(H)积分的详情见[1].

3.4.4 评注

微积分基本定理是微积分中至关重要的一个定理,其应用十分广泛.定理1与定理2说明了这个定理的条件可适当减弱.这部分的材料来源于文献[109].

本节的例3与例4说明了 Riemann 可积的函数未必存在原函数,而有原函数的函数未必 Riemann 可积.因此,Riemann 积分与 Newton 积分并不等价,由此还得知 Riemann 积分运算不能完全解决由函数的有穷导数求其原函数的问题,从而使微积分基本定理的应用受到了限制.

Lebesgue 积分推广了 Riemann 积分.但是,Lebesgue 积分是一种绝对收敛积分,它并不包括广义 Riemann 积分.例如,函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{\pi}{x^2}, & x\neq 0\ , \\ 0\ , & x=0\ . \end{cases}$$

在[0,1]上可导,然而 f' 并不 Lebesgue 可积.因此,Lebesgue 积分运算也不能完全解决由函数的有穷导数求其原函数的问题.

本节向读者介绍了两种新的积分,即 G 积分与 Henstock 积分.这两种积分既包括 Riemann 积分,也包括 Lebesgue 积分,而且定理4与定理9还说明了它们完全解决了从函数的有穷导数求其原函数的问题.

G 积分的材料来源于文献[109].H 积分是由英国数学家 Henstock 和波兰数学家 Kurzweil 于1958年各自独立提出来的.之后,Henstock 及其他数学家逐步建立了这种积分的理论.关于 H 积分的详细情况见文献[1].

§3.5 积分中值定理

3.5.1 积分中值定理的一个简洁证明

积分中值定理是数学分析中的基本定理之一，大部分数学分析教材将此定理叙述为：

定理1 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，函数 g 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx .$$

也有一些数学分析的教材将此定理叙述为下面的形式，但往往没有给出详细的证明.

定理2 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，g 在 $[a,b]$ 上可积且不变号，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx . \tag{1}$$

显然，定理2的结论强于定理1的结论.

我们主张还是将积分中值定理叙述成定理2的形式较好，这不仅是由于在很多应用中要用到这个“内”字，而且也与微分中值定理的叙述相一致.

下面，我们给出定理2的一个简明证明.

证 不妨假定 g 在 $[a,b]$ 上非负. 因 f 在 $[a,b]$ 上连续，故它在 $[a,b]$ 上取到最小值 m 与最大值 M. 若 $\int_a^b g(x)dx=0$，则可在 (a,b) 内任取一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

成立. 若 $\int_a^b g(x)dx>0$，则

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx ,$$

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M .$$

若上式没有一个等号成立，则有

$$m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} < M . \tag{2}$$

设 f 分别在 x_1 与 x_2 取得最小值与最大值，即 $f(x_1)=m, f(x_2)=M$. 不妨设 $x_1<x_2$，则 $[x_1,x_2]\subset[a,b]$. 由(2)可知，数

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

介于 m 与 M 之间，由连续函数介值定理可知，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$ 使 $f(\xi)=\mu$，即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx .$$

显然，$\xi\in(a,b)$，故结论成立.

若(2)中至少有一个等号成立. 不妨设右边的等号成立，则有

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)dx = 0 .$$

由于 g 在 $[a,b]$ 上可积，故它在 $[a,b]$ 上的 Darboux 下和

$$s(T,g) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

当 $\|T\|\to 0$ 时趋于 $\int_a^b g(x)dx$，即

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

前面已设 $\int_a^b g(x)dx>0$，故存在分划 T，只要 $\|T\|$ 充分小，就有

$$s(T,g) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i > 0 .$$

由于$g(x)\geqslant 0$,故$m_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n)$,从而$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$中至少有一项大于零. 不妨设$m_i\Delta x_i>0$. 由于$\Delta x_i>0$,所以$m_i>0$,而在$[x_{i-1},x_i]$上$g(x)\geqslant m_i$,又$f(x)\leqslant M\ (a\leqslant x\leqslant b)$,故

$$0\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}[M-f(x)]m_i dx\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}[M-f(x)]g(x)dx$$

$$\leqslant\int_a^b[M-f(x)]g(x)dx=0.$$

因此,$\int_{x_{i-1}}^{x_i}[M-f(x)]m_i dx=0$,其中被积函数$[M-f(x)]m_i$在$[x_{i-1},x_i]$上非负且连续,故必有

$$[M-f(x)]m_i\equiv 0,\ x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i.$$

而在$[x_{i-1},x_i]$上$m_i>0$,故必有$f(x)\equiv M(x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i)$. 因此对$(x_{i-1},x_i)$内任意一点$\xi$,都有$f(\xi)=M$,从而

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx\ (a<\xi<b).$$

3.5.2 积分中值定理的推广

下面,我们将给出积分中值定理的推广形式. 为此,先给出两个引理.

引理1 设f是区间$[a,b]$上Riemann可积的非负函数,且$\int_a^b f(x)dx=0$,那么对任意的$\varepsilon>0$,存在$[a,b]$的子区间$[\alpha,\beta]$,使得对任意的$x\in[\alpha,\beta]$都有$0\leqslant f(x)<\varepsilon$.

证 由条件,对任意的$\varepsilon>0$,存在$[a,b]$的分划$T:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i-\int_a^b f(x)dx<(b-a)\varepsilon,$$

即$\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i<(b-a)\varepsilon$,其中$M_i$为$f$在第$i$个小区$[x_{i-1},x_i]$上的上确界. 设$M_{i_0}=\min\{M_i\mid i=1,2,\cdots,n\}$,则

$$M_{i_0}(b-a)=\sum_{i=1}^{n}M_{i_0}\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i<(b-a)\varepsilon.$$

所以 $M_{i_0}<\varepsilon$，故当 $x\in[x_{i_0-1},x_{i_0}]$时，$0\leqslant f(x)<\varepsilon$.

引理2 设 f 是$[a,b]$上 Riemann 可积的非负函数，$A=\{x\in[a,b]\mid f(x)=0\}$，则$\int_a^b f(x)dx=0$的充要条件是 A 在$[a,b]$中稠密.

证 充分性显然.

必要性. 对任意的 $x_0\in[a,b]$及任意的自然数 n，取$[a,b]$的一个子区间$[\alpha_0,\beta_0]$使得 $x_0\in[\alpha_0,\beta_0]$且 $\beta_0-\alpha_0\leqslant\frac{1}{n}$，由 f 非负及 $\int_a^b f(x)dx=0$可得$\int_{\alpha_0}^{\beta_0}f(x)dx=0$，由引理1存在$[\alpha_0,\beta_0]$的子区间$[\alpha_1,\beta_1]$使得 $\beta_1-\alpha_1\leqslant\frac{\beta_0-\alpha_0}{2}$，且对每一 $x\in[\alpha_1,\beta_1]$都有 $0\leqslant f(x)<\frac{1}{2}$，显然对于$[\alpha_1,\beta_1]$仍有 $\int_{\alpha_1}^{\beta_1}f(x)dx=0$，再利用引理1可得$[\alpha_1,\beta_1]$的子区间$[\alpha_2,\beta_2]$使得 $\beta_2-\alpha_2<\frac{\beta_0-\alpha_0}{2^2}$，且对每一 $x\in[\alpha_2,\beta_2]$都有 $0\leqslant f(x)<\frac{1}{2^2}$，利用归纳法可得$[\alpha_0,\beta_0]$的一列子区间$\{[\alpha_k,\beta_k]\mid k=1,2,\cdots\}$使得$[\alpha_k,\beta_k]\supset[\alpha_{k+1},\beta_{k+1}]$，$\beta_k-\alpha_k<\frac{\beta_0-\alpha_0}{2^k}$，且对每一 $x\in[\alpha_k,\beta_k]$都有 $0\leqslant f(x)<\frac{1}{2^k}$，$(k=1,2,\cdots)$，由闭区间套定理存在 $x_n\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[\alpha_k,\beta_k]\subset[\alpha_0,\beta_0]$，所以对每一自然数 k 都有 $0\leqslant f(x_n)<\frac{1}{2^k}$，由此可得 $f(x_n)=0$，即 $x_n\in A$，据 $x_n,x_0\in[\alpha_0,\beta_0]$及 $\beta_0-\alpha_0<\frac{1}{n}$ 知. $x_n\to x_0$，所以 A 在$[a,b]$上稠密.

定理3 设 f 是$[a,b]$上有原函数的 Riemann 可积函数，g 在$[a,b]$上 Riemann 可积且不变号，则在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx .$$

证 不妨设 g 在 $[a,b]$ 上非负，若 $\int_a^b g(x)dx = 0$，由引理2，$B = \{x \in [a,b] | g(x) = 0\}$ 在 $[a,b]$ 上稠密，记 $A = \{x \in [a,b] | f(x)g(x) = 0\}$，则 $A \supset B$，所以 A 在 $[a,b]$ 上稠密，对 $[a,b]$ 的任一分划 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，由 A 在 $[a,b]$ 上稠密知，对每一小区间 $[x_{i-1},x_i]$，存在 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ 使得 $\xi_i \in A$，即 $f(\xi_i)g(\xi_i) = 0$，因此对应的 Riemann 积分和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i = 0$，由此可得 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$，此时对每一 $\xi \in (a,b)$ 都有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx = 0 .$$

若 $\int_a^b g(x)dx > 0$，则令 $m = \inf\{f(x) | x \in [a,b]\}$，$M = \sup\{f(x) | x \in [a,b]\}$. 设 F 是 f 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，即当 $x \in [a,b]$ 时，恒有 $F'(x) = f(x)$，显然

$$m\int_a^b g(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx ,$$

所以

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M . \tag{3}$$

记

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} .$$

若(3)没有一个等号成立，则有 $m < \mu < M$，此时存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$ 使得 $m \leqslant f(x_1) < \mu$，$\mu < f(x_2) \leqslant M$. 不妨设 $x_1 < x_2$，则 $[x_1,x_2] \subset [a,b]$，且 $F'(x_1) = f(x_1) < \mu < f(x_2) = F'(x_2)$，由 Darboux 定理存在 $\xi \in (x_1,x_2)$ 使 $F'(\xi) = f(\xi) = \mu$，此即

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx,\ \xi \in (x_1,x_2) \subset (a,b)\ .$$

若(3)中至少有一个等号成立，不妨设

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = M\ ,$$

则可得

$$\int_a^b [M - f(x)]g(x)dx = 0\ .$$

对$[a,b]$任一分划 $T: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记 $m_i=\inf\{g(x)\mid x \in [x_{i-1},x_i]\}$，则

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b g(x)dx\ .$$

故存在分划T，使得其对应的下和$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i > 0$. 因此存在某个自然数 i_0，$1 \leqslant i_0 \leqslant n$ 使 $m_i\Delta x_i > 0$，于是 $m_{i_0} > 0$. 由于

$$0 \leqslant \int_{x_{i_0-1}}^{x_{i_0}} [M - f(x)]m_{i_0}dx \leqslant \int_{x_{i_0-1}}^{x_{i_0}} [M - f(x)]g(x)dx$$

$$\leqslant \int_a^b [M - f(x)]g(x)dx = 0\ ,$$

所以 $\int_{x_{i_0-1}}^{x_{i_0}} [M-f(x)]m_{i_0}dx = 0$. 令 $C = \{x \in [x_{i_0-1},x_{i_0}] \mid f(x) = M\}$，由引理 2 知 c 在$[x_{i_0-1},x_{i_0}]$上稠密，故有 $\xi \in (x_{i_0-1},x_{i_0}) \subset (a,b)$ 使得 $\xi \in C$，即 $f(\xi) = M$. 所以

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = M\int_a^b g(x)dx = f(\xi)\int_a^b f(x)dx\ .$$

这一定理与未推广前的积分中值定理相比较，f 在$[a,b]$上连续的条件被减弱为 f 在$[a,b]$上存在原函数，而且结论中的中间点 ξ 精确到了(a,b)内，这不仅方便应用而且与微分中值定理相一致.

由积分中值定理知：若函数 f 和 g 在区间$[a,b]$上连续，φ 在

$[a,b]$上可积且不变号，则有

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi_1)\int_a^b \varphi(x)dx, a < \xi_1 < b,$$

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = g(\xi_2)\int_a^b \varphi(x)dx, a < \xi_2 < b,$$

即有等式

$$g(\xi_2)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi_1)\int_a^b g(x)\varphi(x)dx,$$

式中ξ_1与ξ_2一般不会相等. 下面的定理4将说明在一定的条件下有

$$g(\xi)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\varphi(x)dx .$$

特别，当$g\equiv 1$时，就是积分中值定理.

定理4 若函数$f\varphi$和$g\varphi$分别在开区间(a,b)内连续且在闭区间$[a,b]$上可积，在(a,b)内$\varphi \neq 0$，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使得

$$g(\xi)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\varphi(x)dx .$$

证 令

$$F(x) = \begin{vmatrix} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx & \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \\ \int_a^x f(t)\varphi(t)dt & \int_a^x g(t)\varphi(t)dt \end{vmatrix},$$

由条件知F在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$F(a)=F(b)=0$. 由 Rolle 定理知：在(a,b)内至少存在一点ξ使得$F'(\xi)=0$. 又因为

$$F'(x) = \begin{vmatrix} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx & \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \\ f(x)\varphi(x) & g(x)\varphi(x) \end{vmatrix},$$

故

$$F'(\xi) = \varphi(\xi)\begin{vmatrix} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx & \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \\ f(\xi) & g(\xi) \end{vmatrix}.$$

由于 $\varphi(\xi)\neq 0$,因而

$$\begin{vmatrix} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx & \int_a^b g(x)\varphi(x)dx \\ f(\xi) & g(\xi) \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$g(\xi)\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\varphi(x)dx.$$

定理证毕.

将定理4推广到一般的形式即得下面的定理.

定理5 若 $f_i\varphi$ $(i=1,2,\cdots,2n)$在开区间(a,b)内连续且在闭区间$[a,b]$上可积,又在(a,b)内 $\varphi\neq 0$,则在(a,b)内至少存在一点ξ,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} \int_a^b f_{2i-1}(x)\varphi(x)dx & \int_a^b f_{2i}(x)\varphi(x)dx \\ f_{2i-1}(\xi) & f_{2i}(\xi) \end{vmatrix} = 0.$$

证 只要令

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} \int_a^b f_{2i-1}(x)\varphi(x)dx & \int_a^b f_{2i}(x)\varphi(x)dx \\ \int_a^x f_{2i-1}(t)\varphi(t)dt & \int_a^x f_{2i}(t)\varphi(t)dt \end{vmatrix},$$

再利用 Rolle 定理,类似于定理4的证明即可证得定理5.

3.5.3 积分中值定理中间值的唯一性

下面我们进一步讨论积分中值定理中的中间点 ξ 的唯一性问题. 为此首先给出一个本身就具有重要意义的辅助定理.

定理6 若 f 是闭区间$[a,b]$上的连续函数,则 f 在开区间(a,b)内无极值点的充要条件是 f 是$[a,b]$上的严格单调函数.

证 充分性显然.

必要性. 据$[a,b]$上的连续函数 f 在(a,b)内无极值点可知,$f(a)$和 $f(b)$中有一个是 f 在$[a,b]$上的最大值,另一个是最小值. 当 $f(a)$为最小值,$f(b)$为最大值时,必有 $f(a)<f(b)$,对任意的

$x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$.

(i) 当 $x_1 = a$ 时，必有 $f(a) = f(x_1) < f(x_2)$. 否则由 $f(a)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值可得 $f(a) = f(x_2)$，故此时 f 在 (a,x_2) 内某一点 x_0 达到 f 在 $[a,x_2]$ 上的最大值，由此知 x_0 是 f 在 (a,b) 内的一个极大值点，矛盾.

(ii) 当 $a < x_1$ 时，也必有 $f(x_1) < f(x_2)$. 否则 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，再由 $f(x_1) \geqslant f(a)$ 知，f 在 (a,x_2) 内某一点 z_0 处达到 f 在 $[a,x_2]$ 上的最大值，故此时有 z_0 为 f 在 (a,b) 内的极大值点，矛盾.

综上所述，知 f 是 $[a,b]$ 上的严格单增函数. 类似地，可得当 $f(a)$ 为 f 在 $[a,b]$ 上的最大值，$f(b)$ 为最小值时，f 是严格单减的.

定理7 设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数，g 是 $[a,b]$ 上的正(或负)值 Riemann 可积函数，则对 $[a,b]$ 的任意子区间 $[\alpha,\beta]$，都有唯一的 $\xi \in (\alpha,\beta)$ 使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^\beta g(x)dx$$

成立的充要条件是 f 为 $[a,b]$ 上严格单调函数.

证 由 g 是 $[a,b]$ 上的正(或负)值可积函数知，对 $[a,b]$ 的每一子区间 $[\alpha,\beta]$ 都有 $\int_\alpha^\beta g(x)dx \neq 0$，据此容易验证，当 f 是 $[a,b]$ 上严格单调函数时，存在唯一的 $\xi \in (\alpha,\beta)$ 使得

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)dx .$$

因此充分性成立.

必要性. 据定理6，我们只须说明 f 在 (a,b) 内无极值点即可. 若 f 在 (a,b) 内有极值点 x_0，不妨设 x_0 为 f 的极大值点，则有 $\delta > 0$，使得 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset [a,b]$，且 $f(x_0)$ 是 f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上的最大值. 由条件容易验证 f 在 $[a,b]$ 的每一子区间 $[a_1,b_1]$ 上都不是常值函数. 因此，f 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 与 $[x_0, x_0+\delta)$ 上都不取常值，故有 $x_1 \in (x_0-\delta, x_0)$ 及 $x_2 \in (x_0, x_0+\delta)$ 使得 $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. 所以

$$m = \max\{f(x_1), f(x_2)\} < f(x_0) .$$

记

$$\alpha = \sup\{t \in [x_1, x_0] \mid f(t) \leqslant m\},$$

$$\beta = \inf\{t \in [x_0, x_2] \mid f(t) \leqslant m\}.$$

据 f 连续及 $f(x_0) > m$ 可得 $f(\alpha) = f(\beta) = m$ 是 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上的最小值，且 $\alpha < x_0 < \beta$. 若 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 使

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_\alpha^\beta g(x)dx,$$

那么

(i) 当 $f(\xi) = m$ 时，$\int_\alpha^\beta [f(x) - m]g(x)dx = 0$，由引理 2 知，$A = \{x \in [\alpha, \beta] \mid f(x) = m\}$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上稠密，故有 $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ 使得 $\xi_1, \xi_2 \in A$，且 $\xi_1 \neq \xi_2$，所以 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = m = f(\xi)$，矛盾.

(ii) 当 $f(\xi) = f(x_0)$ 时，由 $f(x_0)$ 为 f 在 $[\alpha, \beta]$ 上的最大值，类似(i)可得到矛盾.

(iii) 当 $f(\alpha) = f(\beta) = m < f(\xi) < f(x_0)$ 时，据连续函数介值定理可知，存在 $\xi_1 \in (\alpha, x_0)$ 及 $\xi_2 \in (x_0, \beta)$ 使得 $f(\xi_1) = f(\xi)$，$f(\xi_2) = f(\xi)$，显然 $\xi_1 \neq \xi_2$，矛盾.

综上可得 f 在 (a, b) 内无极值点. 定理得证.

由定理7我们可以得到关于 Lagrange 微分中值定理中间值唯一性的结果.

推论1 设函数 F 在 $[a, b]$ 上连续可导，则对每一子区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$，都存在唯一的 $\xi \in (\alpha, \beta)$，使得 $F(\beta) - F(\alpha) = F'(\xi)(\beta - \alpha)$ 成立的充要条件是 F 为 $[a, b]$ 上的严格凸(或凹)函数.

证 由微积分基本定理及定理7知，对 $[a, b]$ 的任意子区间 $[\alpha, \beta]$，都存在唯一的 $\xi \in (\alpha, \beta)$ 使得

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_\alpha^\beta F'(x)dx = F'(\xi)(\beta - \alpha)$$

成立的充分必要条件是 $F'(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调. 又因为 $F'(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格等价于 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格凸(或凹)，所以推论成立.

3.5.4 积分中值定理中间值的渐近状态

在积分中值定理

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx,\ \xi \in (a,b)$$

中，一般说来，中间值 ξ 不会是 a 与 b 的中点. 但当 $f'(a)$ 存在且 $f'(a)\neq 0$ 时，在 b 逼近 a 的过程中，ξ 随之逼近于 a 与 b 的中点. 即有

定理8 设函数 f 在区间 $[a,x]$ 上连续，在点 a 可导且 $f'_+(a)\neq 0$，g 在 $[a,x]$ 上连续变号并且 $g(a)\neq 0$. 若

$$\int_a^x f(t)g(t)dt = f(\xi)\int_a^x f(t)dt,\ \xi \in (a,x),$$

则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\dfrac{1}{2}$.

证 考虑函数

$$h(x) = \frac{\int_a^x f(t)g(t)dt - f(a)\int_a^x g(t)dt}{\left(\int_a^x g(t)dt\right)^2},$$

一方面，由积分中值定理，得到

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}h(x) &= \lim_{x\to a}\frac{f(\xi)\int_a^x g(t)dt - f(a)\int_a^x g(t)dt}{(\int_a^x g(t)dt)^2}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}\cdot\frac{\xi-a}{\int_a^x g(t)dt}\\ &= f'(a)\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{g(\eta)(x-a)}\\ &= \frac{f'(a)}{g(a)}\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a},\end{aligned}\tag{4}$$

其中 η 介于 a 与 x 之间，当 $x\to a$ 时必有 $\eta\to a$.

另一方面，由积分中值定理与 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)}{2g(x)\int_a^x g(t)dt}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{g(\eta)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{f'(a)}{g(a)}, \tag{5}$$

由(4)、(5)可得$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\dfrac{1}{2}$. 定理得证.

由定理8又可得到关于微分中值定理中的中间值的渐近性的结果.

推论2 设函数 F 在区间$[a,b]$上连续可导,且 F 在点 a 二次可导,并有 $F''(a)\neq 0$. 若 $a<x<b$,$\xi\in(a,x)$,使得

$$F(x)-F(a)=F'(\xi)(x-a),$$

则有 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\dfrac{1}{2}$.

证 取 $f(x)=F(x)$,$x\in[a,b]$,则 f 在$[a,b]$上连续,且 $f'(a)$存在,并有 $f'(a)\neq 0$. 微积分基本定理意味着:$\xi\in(a,x)$使得 $F(x)-F(a)=F'(\xi)(x-a)$等价于

$$\int_a^x f(t)dt=f(\xi)(x-a).$$

据定理8即得$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\xi-a}{x-a}=\dfrac{1}{2}$.

3.5.5 评注

本节介绍的定理2的证明选自文献[10]. 绍文[48]、马意海[5]、李清煜[40]、张广梵[51]及曾祥富[91]也分别给出了定理2的各种证明.

本节的定理3、定理6和定理7是由我们给出的,而定理4和定理5是由夏禹光[86]给出的. 定理8最初是由 Jacobson[134]在 $g(x)\equiv 1$ 的条件下得到的,一般的情形由李文荣[33]完成. 陈迪荣[58]、李毅夫[42]、岳中亮、李录书及王启新[49]也研究了有关微分中值定理或积分中值定理中的中间点的渐近性质.

§3.6 Riemann 引理与 Dirichlet 引理的推广

3.6.1 Riemann 引理的推广

Riemann 引理是数学分析中的重要定理之一，它具有比较广泛的应用. 这一引理可叙述为：

引理1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积且绝对可积，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x dx = 0 .$$

一个自然的猜想是：可否用一般的周期函数 $g(x)$ 代替引理1中的 $\sin x$ 而得到更为一般的结果？这一猜想的答案是肯定的，即有

定理1 设 f 在 $[a,b]$ 上可积且绝对可积，g 是以 T 为周期的函数，且 g 在 $[0,T]$ 上可积(常义)，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^b f(x)dx .$$

证 (i) 先假定 $[a,b]$ 是有限区间且 f 在 $[a,b]$ 上常义可积. 在这种情况下，当 g 非负时，取自然数 m 使得 $[a,b]\subset[-mT, mT]$，作函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x\in[a,b], \\ 0, & x\in[-mT,mT]\backslash[a,b], \end{cases}$$

显然 F 在 $[-mT,mT]$ 上可积. 对任意的正数 λ，做 $[-mT,mT]$ 的分划 L_λ：$-mT\leqslant -\frac{[\lambda m]}{\lambda}T < -\frac{[\lambda m]-1}{\lambda}T < \cdots < 0 < \cdots < \frac{[\lambda m]-1}{\lambda}T < \frac{[\lambda m]}{\lambda}T \leqslant mT$，于是

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(\lambda x)dx &= \int_{-mT}^{mT} F(x)g(\lambda x)dx \\ &= \left(\int_{-mT}^{-\frac{[\lambda m]}{\lambda}T} F(x)g(\lambda x)dx + \int_{\frac{[\lambda m]}{\lambda}T}^{mT} F(x)g(\lambda x)dx\right)\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=-[\lambda m]}^{[\lambda m]-1}\int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}}F(x)g(\lambda x)dx\ . \tag{1}$$

由于 $F(x)g(\lambda x)$ 为有界函数，且 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left(mT-\dfrac{[\lambda m]}{\lambda}T\right)=0$，所以

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_{-mT}^{-\frac{[\lambda m]}{\lambda}T}F(x)g(\lambda x)dx+\int_{\frac{[\lambda m]}{\lambda}T}^{mT}F(x)g(\lambda x)dx\right)=0\ . \tag{2}$$

区间 $[-mT,mT]$ 在分划 L_λ 下第一个小区间 $\left[-mT,-\dfrac{[\lambda m]}{\lambda}T\right]$ 与最后一个小区间 $[\dfrac{[\lambda m]}{\lambda}T,mT]$ 的长度都为 $(m-\dfrac{[\lambda m]}{\lambda})T$，其它小区间 $[k\dfrac{T}{\lambda},(k+1)\dfrac{T}{\lambda}](k=-[\lambda m],-([\lambda m]-1),\cdots,-1,0,1,\cdots,[\lambda m]-1)$ 的长度均为 $\dfrac{T}{\lambda}$，故 $\|L_\lambda\|=\dfrac{T}{\lambda}$. 记 s_λ 与 S_λ 分别为 $F(x)$ 关于分划 L_λ 的小和与大和，则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}s_\lambda=\lim_{\lambda\to+\infty}S_\lambda=\int_{-mT}^{mT}F(x)dx=\int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

对每一个整数 k，$[-\lambda m]\leqslant k\leqslant[\lambda m]-1$，记 m_k 和 M_k 分别为 F 在 $[k\dfrac{T}{\lambda},(k+1)\dfrac{T}{\lambda}]$ 上的下确界与上确界，由 g 非负可得

$$m_k\int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}}g(\lambda x)dx\leqslant\int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}}F(x)g(\lambda x)dx\leqslant M_k\int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}}g(x)dx\ .$$

据此易知，存在介于 m_k 与 M_k 之间的数 c_k 使得

$$\int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}}F(x)g(\lambda x)dx=c_k\int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}}g(\lambda x)dx\ .$$

令 $x=\dfrac{t}{\lambda}+k\dfrac{T}{\lambda}$，则

$$\int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}}g(\lambda x)dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^T g(t+kT)dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^T g(x)dx\ .$$

所以

$$\sum_{k=-[\lambda m]}^{[\lambda m]-1}\int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}}F(x)g(\lambda x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\sum_{k=-[\lambda m]}^{[\lambda m]-1}c_k\frac{T}{\lambda}\ . \tag{4}$$

由于 $F(-mT)=F(mT)=0$，可得

$$\sum_{k=-[\lambda m]}^{[\lambda m]-1} c_k \frac{T}{\lambda} = F(-mT)\left(m - \frac{[\lambda m]}{\lambda}\right)T$$
$$+ \sum_{k=-[\lambda m]}^{[\lambda m]-1} c_k \frac{T}{\lambda} + F(mT)\left(m - \frac{[\lambda m]}{\lambda}\right)T$$

介于 F 关于分划 L_λ 的小和 s_λ 与大和 S_λ 之间，据(3)有

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{k=-[\lambda m]}^{[\lambda m]-1} c_k \frac{T}{\lambda} = \int_a^b f(x)dx .$$

由此式与(4)得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \sum_{k=-[\lambda m]}^{[\lambda m]-1} \int_{k\frac{T}{\lambda}}^{(k+1)\frac{T}{\lambda}} F(x)g(\lambda x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \int_a^b f(x)dx .$$

再由(1)和(2)即得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)g(\lambda x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \int_a^b f(x)dx .$$

当 g 不是非负函数时，令 $\varphi_1(x)=(|g(x)|+g(x))/2$，$\varphi_2(x)=(|g(x)|-g(x))/2$. 显然 φ_1 与 φ_2 都是周期为 T 的非负函数，且 $g(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$. 由上面已证的事实可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)g(x)dx$$
$$= \lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\varphi_1(x)dx - \lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(x)\varphi_2(x)dx$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_1(x)dx \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{T}\int_0^T \varphi_2(x)dx \int_a^b f(x)dx$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \int_a^b f(x)dx .$$

(ii) $b=+\infty$ 且 f 在 $[a,+\infty)$ 上可积与绝对可积. 由 g 在 $[0,T]$ 上常义可积知，g 是有界函数. 设 $|g(x)|\leqslant M$，并记 $c=\left|\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\right|+M$，对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $A>a$ 使得 f 在 $[a,A]$ 上常义可积，且

$$\int_A^{+\infty} |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2c} .$$

由(i)，$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^A f(x)g(\lambda x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \int_a^A f(x)dx$，所以存在

正数 X，当 $\lambda > X$ 时有

$$\left|\int_a^A f(x)g(\lambda x)dx - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^A f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当 $\lambda > X$ 时，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^{+\infty} f(x)g(\lambda x)dx - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \\
&\leqslant \left|\int_a^A f(x)g(\lambda x)dx - \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^A f(x)dx\right| \\
&+ \left|\int_A^{+\infty} f(x)g(\lambda x)dx\right| + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_A^{+\infty} f(x)dx\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + M\int_A^{+\infty} |f(x)|dx + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\right|\int_A^{+\infty} |f(x)|dx \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \left(M + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\right|\right)\int_A^{+\infty} |f(x)|dx \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty} f(x)g(\lambda x)dx = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

对于 $a=-\infty$ 的情况可类似证明.

(iii) 当 f 是无界函数，a(或 b)为其瑕点，且 f 在 $[a,b]$ 上可积与绝对可积时，仿(ii)即可证明此时定理结论仍成立.

下面我们通过一些实例来说明此定理的一些应用

例1 若 f 在 $[a,b]$ 上可积，则

$$\lim_{n\to\infty}\pi\int_a^b f(x)|\sin nx|dx = \lim_{n\to\infty}4\int_a^b f(x)\sin^2 nx dx.$$

证 由定理1，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin nx|dx &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin x|dx\int_a^b f(x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx,
\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin^2 nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 x\,dx\int_a^b f(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_a^b f(x)\,dx\ ,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\pi\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx = \lim_{n\to\infty}4\int_a^b f(x)\sin^2 nx\,dx\ .$$

例2 设 $g(x)=\sum_{k=1}^{m}a_k[kx]$，且 $\sum_{k=1}^{m}ka_k=0$，又 f 在 $[a,b]$ 上可积，计算 $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,dx$.

解 因为 $g(x+1)=\sum_{k=1}^{m}a_k[k(x+1)]=\sum_{k=1}^{m}a_k[kx]+\sum_{k=1}^{m}a_k k=g(x)$，所以 $g(x)$ 是以 1 为周期的函数，据定理 1 可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx\int_a^b f(x)\,dx\ ,$$

而

$$\int_0^1[kx]\,dx=\int_0^{\frac{1}{k}}0\,dx+\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{2}{k}}1\,dx+\cdots+\int_{1-\frac{1}{k}}^{1}(k-1)\,dx$$
$$=1\cdot\frac{1}{k}+2\cdot\frac{1}{k}+\cdots+(k-1)\frac{1}{k}=\frac{1}{2}(k-1)\ ,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)g(nx)\,dx=\sum_{k=1}^{m}\int_0^1 a_k[kx]\,dx\int_a^b f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}a_k(k-1)\int_a^b f(x)\,dx=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}a_k\int_a^b f(x)\,dx\ .$$

例3 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}$.

证 因为

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}\ ,$$

所以

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

令 $f(x)=\dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-2\sin\frac{1}{2}x}{2x\sin\frac{1}{2}x}$，由 L. Hospital 法则可得 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，所以 $f(x)$在$[0,\pi]$上可积. 据定理1，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{x}\right)\sin(n+\frac{1}{2})x\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\,dx\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}-\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\pi}{2}.$$

令 $t=(n+\frac{1}{2})x$，得

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx=\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin t}{t}dt.$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

下面是关于 Riemann 引理又一形式的推广.

定理2 设 f 在$[a,+\infty)$上可积与绝对可积. 对每一正数 λ，

记

$$I_\lambda = \sup\left\{ \left| \int_b^c f(x)\sin\lambda x dx \right| \mid (b,c) \subset [a, +\infty) \right\},$$

则 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_\lambda = 0$.

证 对每一正数 λ,存在$[a,+\infty)$的子区间(b_λ,c_λ)使得

$$\left|\int_{b_\lambda}^{c_\lambda} f(x)\sin\lambda x dx\right| \leqslant I_\lambda < \left|\int_{b_\lambda}^{c_\lambda} f(x)\sin\lambda x dx\right| + \frac{1}{\lambda}. \quad (5)$$

记 $A_\lambda = \int_{b_\lambda}^{c_\lambda} f(x)\sin\lambda x dx$,作变换 $x = t + \frac{\pi}{\lambda}$,则

$$\begin{aligned} A_\lambda &= -\int_{b_\lambda-\frac{\pi}{\lambda}}^{c_\lambda-\frac{\pi}{\lambda}} f(t+\frac{\pi}{\lambda})\sin\lambda t dt \\ &= -\int_{b_\lambda}^{c_\lambda} f(x+\frac{\pi}{\lambda})\sin\lambda x dx - \int_{b_\lambda-\frac{\pi}{\lambda}}^{b_\lambda} f(x+\frac{\pi}{\lambda})\sin\lambda x dx \\ &\quad + \int_{c_\lambda-\frac{\pi}{\lambda}}^{c_\lambda} f(x+\frac{\pi}{\lambda})\sin\lambda x dx. \end{aligned}$$

所以

$$2|A_\lambda| \leqslant \int_{b_\lambda}^{c_\lambda} |f(x) - f(x+\frac{\pi}{\lambda})| dx + \int_{b_\lambda-\frac{\pi}{\lambda}}^{b_\lambda} |f(x+\frac{\pi}{\lambda})| dx +$$

$$\int_{c_\lambda-\frac{\pi}{\lambda}}^{c_\lambda} |f(x+\frac{\pi}{\lambda})| dx \leqslant \int_a^{+\infty} |f(x) - f(x+\frac{\pi}{\lambda})| dx +$$

$$\int_{b_\lambda}^{b_\lambda+\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)| dx + \int_{c_\lambda}^{c_\lambda+\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)| dx.$$

据 f 在$[a,+\infty)$上可积与绝对可积可得

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^{+\infty} |f(x) - f(x+\frac{\pi}{\lambda})| dx = 0, \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{b_\lambda}^{b_\lambda+\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)| dx = 0,$$

且 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{c_\lambda}^{c_\lambda+\frac{\pi}{\lambda}} |f(x)| dx = 0.$

因此

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\left|\int_{b_\lambda}^{c_\lambda} f(x)\sin\lambda x dx\right| = \lim_{\lambda\to+\infty}|A_\lambda| = 0.$$

由此式及(5)即得

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I_\lambda = 0 .$$

3.6.2 Dirichlet 引理的推广

若 g 是区间$[0,h](h>0)$上的单增函数，则

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^h g(x)\frac{\sin px}{x}dx = g(+0)\frac{\pi}{2} .$$

这一有趣的积分公式是著名的 Dirichlet 引理，它可以改写成

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^h g(x)\frac{\sin px}{x}dx = g(+0)\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx .$$

此式使我们猜想：将 $\sin x$ 换成一般的函数 $f(x)$，那么在$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛的条件下，是否有相似的结果呢？定理3肯定地回答了这一猜想.

定理3 设函数 g 在$[0,h](h>0)$上单增，且广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，则

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^h g(x)\frac{f(px)}{x}dx = g(+0)\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx .$$

为了证明这一定理我们先给出一个引理.

引理2 设 f 是区间$[a,b]$上的无界函数，a 是其瑕点且$\int_a^b f(x)dx$ 收敛，又设 g 是$[a,b]$上的非负单增函数，则存在 $\xi\in[a,b]$使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_\xi^b f(x)dx .$$

证 据(常义)积分第二中值定理，容易验证$\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛. 再由积分第二中值定理，对每一自然数 n，存在 $\xi_n\in[a-\frac{1}{n},b]$使得

$$\int_{a-\frac{1}{n}}^b f(x)g(x)dx = g(b)\int_{\xi_n}^b f(x)dx .$$

由于$\{\xi_n\}\subset[a,b]$，所以有收敛子列，不失一般性可设$\lim_{n\to\infty}\xi_n=\xi$，据

$\int_a^b f(x)dx$ 收敛可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\xi_n}^b f(x)dx=\int_{\xi}^b f(x)dx\ ,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx&=\lim_{n\to\infty}\int_{a-\frac{1}{n}}^b f(x)g(x)dx\\&=\lim_{n\to\infty}g(b)\int_{\xi_n}^b f(x)dx\\&=g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx\ .\end{aligned}$$

定理3的证明 记

$I_1=g(+0)\int_0^h\frac{f(px)}{x}dx$ ，$I_2=\int_0^h(g(x)-g(+0))\frac{f(px)}{x}dx$ ，

则

$$\int_0^h g(x)\frac{f(px)}{x}dx=I_1+I_2.$$

令 $x=\frac{t}{p}$，则

$$I_1=g(+0)\int_0^{ph}\frac{f(t)}{t}dt\to g(+0)\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}dt\ (p\to+\infty)\ .$$

因此，只须说明当 $p\to+\infty$ 时，$I_2\to 0$ 即可. 因

$$\begin{aligned}I_2=&\int_0^{h/\sqrt{p}}(g(x)-g(+0))\frac{f(px)}{x}dx\\&+\int_{h/\sqrt{p}}^h(g(x)-g(+0))\frac{f(px)}{x}dx\ ,\end{aligned}$$

且 $g(x)-g(+0)$ 非负单增，据引理2及(常义)积分第二中值定理存在 $\xi_1\in[0,h/\sqrt{p}\,]$ 及 $\xi_2\in[h/\sqrt{p}\,,h]$ 使得

$$\begin{aligned}I_2&=(g(h/\sqrt{p})-g(+0))\int_{\xi_1}^{h/\sqrt{p}}\frac{f(px)}{x}dx\\&\quad+(g(h)-g(+0))\int_{\xi_2}^h\frac{f(px)}{x}dx\\&=(g(h/\sqrt{p})-g(+0))\int_{p\xi_1}^{\sqrt{p}h}\frac{f(x)}{x}dx\end{aligned}$$

$$+(g(h)-g(+0))\int_{\xi_2 p}^{hp}\frac{f(x)}{x}dx. \tag{6}$$

因为 $\int_0^{\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，故存在 $M>0$，使得对一切 $t>0$，都有

$$\left|\int_0^t\frac{f(x)}{x}dx\right|\leqslant M;$$

从而

$$\left|\int_{p\xi_1}^{\sqrt{p}\,h}\frac{f(x)}{x}dx\right|\leqslant 2M.$$

又当 $p\to+\infty$ 时，$g(h/\sqrt{p})-g(+0)\to 0$，故

$$(g(h/\sqrt{p})-g(+0))\int_{p\xi_1}^{\sqrt{p}\,h}\frac{f(x)}{x}dx\to 0\ (p\to+\infty). \tag{7}$$

由于 $\xi_2\geqslant h/\sqrt{p}$，所以 $p\xi_2\geqslant\sqrt{p}\,h$，故当 $p\to+\infty$ 时，$\sqrt{p}\,h\to+\infty$ 且 $ph\to+\infty$，由此及 $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，可得

$$(g(h)-g(+0))\int_{\xi_2 p}^{hp}\frac{f(x)}{x}dx\to 0\ (p\to+\infty). \tag{8}$$

由(6)、(7)及(8)即得 $I_2\to 0\ (p\to+\infty)$.

3.6.3 评注

定理2是我们参考 Borwein[107] 的结果得到的．如果定理2中的上确界 I_λ 换为 $J_\lambda=\sup\left\{\left|\int_A f(x)\sin\lambda x dx\right|\ |A\subset[a,+\infty)\text{ 为有限个区间的并集}\right\}$，则结论不再成立．比如，取

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,2\pi],\\ 0, & x\notin[0,2\pi],\end{cases}$$

$$A_n=\bigcup_{k=1}^{n}\left(\frac{4k-1}{2n}\pi,\frac{2k}{n}\pi\right).$$

可以验证 $\int_{A_n}f(x)\sin nx dx=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}=-1$，由此可得 $J_n\geqslant 1$.

Riemann 引理中的条件“f 在$[a,b]$上(广义)可积且绝对可积”减弱为“f 在$[a,b]$上(广义)可积”，结论就不再成立，反例见文

献[60].

Dirichlet 引理的推广是由谢民育[90]最先介绍的，定理3是在较弱的条件下得到的进一步推广，它是由闫光杰[26]介绍的.

§3.7 广义积分

3.7.1 广义积分可作为和式极限的几个结论

广义积分保留了(常义)积分的大部分性质，但二者又有明显的不同. 比如，当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上(常义)可积时

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(a+\frac{k}{n}(b-a)) .$$

对于广义积分，上面的等式一般不再成立，但我们有下面的定理.

定理1 设函数 f 在区间 (a,b) 内单调，且 a 和 b 只有一个是奇点，则 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(a+\frac{k}{n}(b-a))$ 存在. 此时

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(a+\frac{k}{n}(b-a)) .$$

证 不失一般性可设 f 在 (a,b) 内单增且 a 为其奇点，容易验证，此时 $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{a+\frac{b-a}{n}}^b f(x)dx$ 为有限数或者为 $-\infty$，据 f 单增可得

$$\int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f(x)dx \leqslant \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(a+\frac{k}{n}(b-a)) \leqslant \int_{a+\frac{b-a}{n}}^b f(x)dx .$$

显然

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{a+\frac{b-a}{n}}^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^{b-\frac{b-a}{n}} f(x)dx .$$

综上可知，$\int_a^b f(x)dx$ 为有限数(即 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛)等价于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \times \sum\limits_{k=1}^{n-1} f(a+\frac{k}{n}(b-a))$ 存在，且有

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a)) .$$

定理得证.

当 a 与 b 都可能是 f 的奇点时,有下面的结果成立.

定理2 设函数 f 是区间 (a,b) 上单调无界函数,g 是 $[a,b]$ 上有界可积函数,当 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛时,$\int_a^b f(x)g(x)dx$ 收敛,且有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(a + \frac{k}{n}(b-a))g(a + \frac{k}{n}(b-a)) .$$

证 不妨设 f 在 (a,b) 上单增,则 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = B$,且 $A \leqslant B$,显然此时只有 a 和 b 可能是 f 的奇点,据 f 单调,不难验证 $\int_a^b f(x)dx$ 收敛意味着 $\int_a^b |f(x)|dx$ 收敛. 记

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} , \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} ,$$

则 $\int_a^b f_1(x)dx$ 与 $\int_a^b f_2(x)dx$ 都收敛.

(i) 当 $-\infty \leqslant A \leqslant B < +\infty$ 时,由 f 在 (a,b) 上单增可得 f_1 在 (a,b) 上有界,所以 $f_1 g$ 在 (a,b) 上有界可积,故有

$$\int_a^b f_1(x)g(x)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f_1(a + \frac{k}{n}(b-a))g(a + \frac{k}{n}(b-a)) .$$

(ii) 当 $-\infty \leqslant A \leqslant B = +\infty$ 时,只有 b 是 f_1 的奇点. $B = +\infty$ 意味着存在 $\delta_0 > 0$ 使得当 $x > b - \delta_0$ 时, $f(x) > 0$. 所以 $f_1(x) = f(x) > 0, x \in (b-\delta_0, b)$. 故 f_1 在 $(b-\delta_0, b)$ 上非负单增. 由 $\int_a^b f_1(x)dx$ 收敛,对任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta \in (0, \delta_0)$ 使得当 $0 < \eta < \delta$ 时 $\int_{b-\eta}^b f_1(x)dx < \varepsilon$. 记 $M = \sup\{|g(x)| \mid x \in (a,b)\}$,则

$$\left|\int_{b-\eta}^b f_1(x)g(x)dx\right| \leqslant M\int_{b-\eta}^b f_1(x)dx < M\varepsilon, \eta \in (0,\delta),$$

所以$\int_a^b f_1(x)g(x)dx$ 收敛. 对任何 $\eta\in(0,\delta)$及自然数 n，记 $\eta_n=\frac{n(b-\eta-a)}{b-a}$，则

$$[\eta_n]\leqslant\frac{n(b-\eta-a)}{b-a}<[\eta_n]+1\ ,$$

即

$$a+\frac{[\eta_n]}{n}(b-a)\leqslant b-\eta<a+\frac{[\eta_n]+1}{n}(b-a)\ .$$

所以 $a+\frac{[\eta_n]}{n}(b-a)\to b-\eta\ (n\to\infty)$.

据此及 f_1g 在$(a,b-\eta)$上有界可积可得

$$\int_a^{b-\eta}f_1(x)g(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{[\eta_n]}f_1(a+\frac{k}{n}(b-a))g(a+\frac{k}{n}(b-a)).\quad(1)$$

又

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{k=[\eta_n]+1}^{n-1}f_1(a+\frac{k}{n}(b-a))g(a+\frac{k}{n}(b-a))\right|$$

$$\leqslant M\sum_{k=[\eta_n]+1}^{n-1}f_1(a+\frac{k}{n}(b-a))\frac{b-a}{n}$$

$$\leqslant M\sum_{k=[\eta_n]+1}^{n-1}\int_{a+\frac{k}{n}(b-a)}^{a+\frac{k+1}{n}(b-a)}f_1(x)dx$$

$$=M\int_{a+\frac{[\eta_n]+1}{n}(b-a)}^{b}f_1(x)dx$$

$$\leqslant M\int_{b-\eta}^{b}f_1(x)dx<M\epsilon\ .\qquad(2)$$

由(1)和(2)可得

$$\int_a^b f_1(x)g(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f_1(a+\frac{k}{n}(b-a))g(a+\frac{k}{n}(b-a))\ .$$

类似地可得

$$\int_a^b f_2(x)g(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f_1(a+\frac{k}{n}(b-a))g(a+\frac{k}{n}(b-a))\,.$$

综上及 $f(x)=\frac{f_1(x)-f_2(x)}{2}$即得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(a+\frac{k}{n}(b-a))g(a+\frac{k}{n}(b-a))\,.$$

证毕.

定理2之逆不真，比如取 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{1-x}$，$x\in(0,1)$，$g(x)\equiv1$，由于 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1-x)^2}<0$，故 f 在$(0,1)$上单调减少，显然$\int_0^1 f(x)dx$ 发散，但

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(\frac{n}{k}-\frac{n}{n-k})$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}=0\,.$$

所以$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}f(\frac{k}{n})=0$存在.

下面我们讨论无穷限广义积分的情形. 设 f 是$[a,+\infty)$上的函数，对任何 $t\in[a,+\infty)$，f 在$[a,t]$上有界可积. 记 $T=\{x_1,x_1',x_2,x_2',x_3,x_3',\cdots\}$是无界单增数列，其中 $x_1=a$，并记$\|T\|=\sup\{x_{i+1}-x_i\mid i=1,2,\cdots\}$，记

$$S(f,T)=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i')(x_{i+1}-x_i)\,.$$

一般说来，即便$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 存在，$\lim_{\|T\|\to0}S(f,T)$ 也未必存在，即不一定有

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\|T\|\to0}S(f,T)\,.$$

定理3 设$\{a_n\}$是一单增的无界数列，$a_1=a$，且$L=\sup\{a_{n+1}-a_n \mid n=1,2,\cdots\}<+\infty$. 令$M_n=\sup\{|f(x)| \mid a_n\leqslant x\leqslant a_{n+1}\}$，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n<+\infty$，则$\int_a^{+\infty}f(x)dx$与$\lim\limits_{\|T\|\to 0}S(f,T)$都存在，且

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\|T\|\to 0}S(f,T).$$

证 容易验证此时$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛，且

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)dx.$$

对任一无界单增数列$T=\{a=x_1,x'_1,x_2,x'_2,x_3,x'_3,\cdots\}$，记$u_n=\sum f(x'_i)(x_{i+1}-x_i)$，其中$\sum$是对满足$a_n\leqslant x_i<a_{n+1}$的所有$i$求和. 对于这样的$i$必有$x'_i\in[a_n,a_{n+1}]$或者$x'_i\in[a_{n+1},a_{n+2}]$，所以

$|f(x'_i)|\leqslant M_n+M_{n+1}$，而且满足$a_n\leqslant x_i<a_{n+1}$所对应的$\sum(x_{i+1}-x_i)\leqslant a_{n+2}-a_n\leqslant 2L$，故

$$|u_n|\leqslant 2L(M_n+M_{n+1}).$$

因此级数

$$S(f,T)=\sum_{i=1}^{\infty}f(x'_i)(x_{i+1}-x_i)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

绝对收敛且关于T一致收敛，故可逐项求极限. 因此

$$\lim_{\|T\|\to 0}S(f,T)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{\|T\|\to 0}u_n.$$

由f在$[a_n,a_{n+1}]$上有界可积，不难验证

$$\lim_{\|T\|\to 0}u_n=\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)dx,$$

所以

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)dx=\lim_{\|T\|\to 0}S(f,T).$$

推论1 设f在$[a,+\infty)$上单调且$\int_a^{+\infty}f(x)dx$存在，则

$$\int_a^{+\infty}f(x)dx=\lim_{\|T\|\to 0}S(f,T),$$

特别地，有

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{h\to 0^+} h\sum_{n=1}^{\infty} f(a+nh)\ .$$

证 不妨设 f 单减(否则以 $-f$ 代替 f)，据此和 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，所以 f 在 $[a,+\infty)$ 上非负．取 $a_n=a+n-1$，则

$$M_n=\sup\{f(x)\mid x\in[a_n,a_{n+1}]\}=f(a_n)\geqslant 0\ ,$$

由 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 存在，对任意的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时

$$\int_{a_{n-1}}^{+\infty} f(x)dx=\sum_{k=n}^{\infty}\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx<\varepsilon\ .$$

f 单减意味着

$$M_k=f(a_k)=f(a_k)(a_k-a_{k-1})\leqslant\int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx\ .$$

所以，当 $n>N$ 时 $\sum\limits_{k=n}^{\infty}M_k<\varepsilon$，故正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛．由定理3得

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{\|T\|\to 0} S(f,T)\ .$$

3.7.2 广义积分的几个收敛判别法

对于广义积分，判别其敛散性是一个最基本的问题，比较判别法是现行数学分析教材中介绍的一种主要方法．这一方法有一明显的弱点，就是在判别之前要先估计积分的敛散性，而后寻找一个适当的“尺度”与之比较，如果被积函数比较复杂，要做出正确的估计和选择恰当的“尺度”都不是容易的事．下面的定理在一定程度上可对这一不足做些弥补．

定理4 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，且对任何 $b>a$，f 在 $[a,b]$ 上可积，如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=p,$$

那么，当$-\infty\leqslant p<-1$时$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；当$-1<p\leqslant+\infty$时$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散.

证 当$-\infty\leqslant p<-1$时，取p_0使得$p<p_0<-1$，则有$x_0>\max\{a,1\}$，当$x\geqslant x_0$时有

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x}<p_0<-1,$$

即$\ln f(x)<p_0\ln x=\ln x^{p_0}$，所以当$x\geqslant x_0$时，$f(x)<x^{p_0}$，由$p_0<-1$及比较判别法可得$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛. 当$-1<p\leqslant+\infty$时，可取$p_1$使得$-1<p_1<p$，则有$x_1>\max\{a,1\}$. 当$x\geqslant x_1$时

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x}>p_1,$$

即$\ln f(x)>\ln x^{p_1}$，所以$x\geqslant x_1$时，$f(x)>x^{p_1}$，$p_1>-1$意味着$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散.

推论2 设非负函数f在$[a,+\infty)$上可导且对任何$b>a$，f在$[a,b]$上可积，如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=p,$$

那么，当$-\infty\leqslant p<-1$时$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛；当$-1<p\leqslant+\infty$时$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散.

证 当$-\infty\leqslant p<-1$时，存在x_0. 当$x\geqslant x_0$时$xf'(x)/f(x)<0$，即$f'(x)<0$，故f在$[x_0,+\infty)$上单减. 所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在. 此时必有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，否则$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L>0$. 因此，$\lim\limits_{x\to+\infty}xf'(x)=Lp<-L$，所以存在正数$A>a$使得$x\geqslant A$时，有$xf'(x)<-L$，即$f'(x)<-\frac{L}{x}$，所以

$$f(x)-f(A)<-L\int_A^x\frac{1}{t}dt=-L(\ln x-\ln A).$$

令 $x\to+\infty$ 得 $L-f(A)<-\infty$，矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 据此利用 L'. Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=p<-1.$$

由定理4知此时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

当 $-1<p\leqslant+\infty$ 时，存在正数 $A>a$ 使得当 $x\geqslant A$ 时 $xf'(x)/f(x)<-1$，即

$$(xf(x))'=xf'(x)+f(x)<0,$$

所以 $xf(x)$ 在 $[A,+\infty)$ 上单减，故 $xf(x)>Af(A)$，即 $f(x)>\frac{Af(A)}{x}$. 由比较判别法即得 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

推论3 f 与定理4中的相同，如果存在 $\alpha>0$ 使

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)^{1/x^\alpha}=K.$$

则当 $K<1$ 时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；而当 $K>1$ 时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

证 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x^\alpha}\cdot\frac{x^\alpha}{\ln x},\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{\ln x}=+\infty$$

及

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{x^\alpha}=\lim_{x\to+\infty}\ln(f(x)^{1/x^\alpha})=\ln K$$

可得，当 $K<1$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=-\infty;$$

当 $K>1$ 时

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}=+\infty.$$

据定理4可知推论3成立.

特别地，当 $\alpha=1$ 时即为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)^{\frac{1}{x}}=K$，当 $K<1$ 时

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；当 $K>1$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散．这可看成正项级数 Cauchy 判别法在广义积分中的推广．

在推论 3 中，当 $K=1$ 时不能断定 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 是收敛还是发散．比如，对于 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ 与 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$，都有

$$\lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x^2})^{1/x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x})^{\frac{1}{x^\alpha}} = 1 \ ,\alpha>0$$

（事实上，对任何 $\beta>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} (x^\beta)^{1/x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty} ((x^\alpha)^{1/x^\alpha})^{\frac{\beta}{\alpha}}=1$，因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{1}{x^\beta})^{1/x^\alpha}=1$），但前者收敛，后者发散．对于这种情况，也就是

$$\lim_{x\to+\infty} (1-f(x)^{1/x^\alpha}) = 0 .$$

我们有更进一步的判别法．

定理5 设函数 f 与推论3中的相同，如果

$$\lim_{x\to+\infty} (1-f(x)^{1/x^\alpha}) \frac{x^\alpha}{\ln x} = K \ , \alpha>0 \ ,$$

则当 $K>1$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；当 $K<1$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散．

证 当 $K>1$ 时，有 $K_0\in(1,K)$ 及正数 $A>a$，使得 $x\geqslant A$ 时

$$(1-f(x)^{1/x^\alpha}) \frac{x^\alpha}{\ln x} > K_0 ,$$

即

$$f(x)^{1/x^\alpha} < 1-K_0 \frac{\ln x}{x^\alpha} .$$

所以当 $x\geqslant A$ 时，

$$\frac{1}{x^\alpha}\ln f(x) < \ln(1-K_0\frac{\ln x}{x^\alpha})$$

$$= -\frac{1}{1-\xi}K_0\frac{\ln x}{x^\alpha}, \xi\in(0,K_0\frac{\ln x}{x}) .$$

因此

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x} < -\frac{K_0}{1-\xi} .$$

显然 $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi=0$，所以有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}\leqslant -K_0<-1.$$

由定理4可得 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

当 $K<1$ 时，有 $K_1\in(K,1)$ 及正数 $A_1>a$，使得 $x\geqslant A_1$ 时

$$(1-f(x)^{1/x^\alpha})\frac{x^\alpha}{\ln x}<K_1,$$

也就是

$$f(x)^{1/x^\alpha}>1-K_1\frac{\ln x}{x^\alpha}.$$

所以当 $x\geqslant A_1$ 时，

$$\frac{1}{x^\alpha}\ln f(x)>\ln(1-K_1\frac{\ln x}{x^\alpha})$$

$$=-\frac{1}{1-\eta}K_1\frac{\ln x}{x^\alpha},\eta\in(0,K_1\frac{\ln x}{x^\alpha}),$$

由此可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln f(x)}{\ln x}\geqslant -K_1>-1.$$

由定理4即得此时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散. 定理得证.

关于正项级数的 D'Alembert 判别法是判断正项级数敛散性的一个重要方法，下面的定理将它推广到广义积分.

定理6 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，对任何 $A>a$，f 在 $[a,A]$ 上可积，P 是正常数. 如果

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+P)}{f(x)}=K,$$

那么当 $K<1$ 时 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛；当 $K>1$ 时，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 发散.

证 当 $K<1$ 时，存在 K_0，$K<K_0<1$ 及 $A>a$，使得 $x\geqslant A$ 时 $\frac{f(x+P)}{f(x)}<K_0$，即 $f(x+P)<K_0f(x)$. 对每一自然数 n，有

$$\int_{A+nP}^{A+(n+1)P}f(x)dx=\int_{A+(n-1)P}^{A+nP}f(t+P)dt\leqslant K_0\int_{A+(n-1)P}^{A+nP}f(x)dx.$$

再由归纳法可得

$$\int_{A+nP}^{A+(n+1)P} f(x)dx \leqslant K_0^n \int_A^{A+P} f(x)dx .$$

于是有

$$\int_A^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{A+nP}^{A+(n+1)P} f(x)dx$$

$$\leqslant (\sum_{n=0}^{\infty} K_0^n) \int_A^{A+P} f(x)dx < +\infty ,$$

故 $\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$，所以 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.

当 $K>1$ 时，存在 $K_1, K>K_1>1$ 及 $A_1>a$，使得 $x \geqslant A_1$ 时 $\frac{f(x+P)}{f(x)} > K_1$，即 $f(x+P)>K_1 f(x)$. 由此可得，对每一自然数 n 都有

$$\int_{A_1+nP}^{A_1+(n+1)P} f(x)dx \geqslant K_1^n \int_{A_1}^{A_1+P} f(x)dx .$$

于是有

$$\int_{A_1}^{+\infty} f(x)dx \geqslant (\sum_{n=0}^{\infty} K_1^n) \int_{A_1}^{A_1+P} f(x)dx = +\infty ,$$

故 $\int_a^{+\infty} f(x)dx = +\infty$，即 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

推论4 设 f 是 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，对任何 $A>a$，f 在 $[a,A]$ 上可积，P 是大于1的常数. 如果

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(Px)}{f(x)} = K ,$$

那么当 $K<\frac{1}{P}$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；当 $K>\frac{1}{P}$ 时 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散.

证 不失一般性可设 $a>0$，令 $x=e^u$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_{\ln a}^{+\infty} e^u f(e^u)du .$$

记 $g(u)=e^u f(e^u)$，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_{\ln a}^{+\infty} g(u)du$ 的敛散性相同. 由于

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{g(u+\ln P)}{g(u)}=\lim_{u\to+\infty}\frac{Pe^u f(Pe^u)}{e^u f(e^u)}=\lim_{u\to+\infty}P\frac{f(Pe^u)}{f(e^u)}=PK,$$

据定理6即得 $K<\frac{1}{P}$ 时 $\int_{\ln a}^{+\infty}g(u)du$ 收敛；当 $K>\frac{1}{P}$ 时 $\int_{\ln a}^{+\infty}g(u)du$ 发散．证毕．

通过作变换 $x=\ln u$，可由推论4证明定理6，所以定理6与推论4是等价的．

3.7.3 应用举例

下面我们给出几个例子来说明上述判别法的应用．

例1 判别下列积分的敛散性；

(a) $\int_1^{+\infty}2^{-\sqrt{x}+1}(1+\sin\frac{1}{2x})^{\sqrt{x^3}}dx$，

(b) $\int_1^{+\infty}(e^{\frac{1}{x}}-\frac{\pi\ln x}{4x})^x dx$，

(c) $\int_1^{+\infty}(1+\frac{1}{x^2})^{-\sqrt{x^5-x}}dx$．

解 (a)由于

$$\lim_{x\to+\infty}[2^{-\sqrt{x}+1}(1+\sin\frac{1}{2x})^{\sqrt{x^3}}]^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[2^{-\sqrt{1+\frac{1}{x}}}(1+\sin\frac{1}{2x})^x]=\frac{\sqrt{e}}{2}<1,$$

据推论3即知

$$\int_1^{+\infty}2^{-\sqrt{x}+1}(1+\sin\frac{1}{2x})^{\sqrt{x^3}}dx$$

收敛．

(b) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}[1-(e^{\frac{1}{x}}-\frac{\pi\ln x}{4x})^{x\cdot\frac{1}{x}}]\frac{x}{\ln x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(1-e^{\frac{1}{x}})}{\ln x}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}<1,$$

由定理5得

$$\int_1^{+\infty}(e^{\frac{1}{x}}-\frac{\pi\ln x}{4x})^x dx$$

发散.

(c) 因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x^2})^{-\sqrt{x^5-x}}}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\ln(1+\frac{1}{x^2})^{-\sqrt{x^4-1}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x^2})^{x^2(-\frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2})}=-\infty,$$

由定理4得

$$\int_1^{+\infty}(1+\frac{1}{x^2})^{-\sqrt{x^5-x}}dx$$

收敛.

例2 讨论

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln^\alpha(\sqrt[3]{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^3+x}\ln^\beta(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{8}})}dx,\ \alpha,\beta>0$$

的敛散性.

解 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(2x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha(\sqrt[3]{(2x)^2-1}+2x)}{\sqrt{(2x)^3+2x}\ln^\beta((2x)^{\frac{1}{4}}+(2x)^{\frac{3}{8}})}\Big/$$

$$\frac{\ln^\alpha(\sqrt[3]{x^2-1}+x)}{\sqrt{x^3+x}\ln^\beta(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{8}})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\alpha(\sqrt[3]{4x^2-1}+2x)}{\ln^\alpha(\sqrt[3]{x^2-1}+x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^\beta(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{8}})}{\ln^\beta((2x)^{\frac{1}{4}}+(2x)^{\frac{3}{8}})}$$

$$\cdot\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3+x}{8x^3+2x}},\qquad(3)$$

由 L'Hospital 法则可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt[3]{4x^2-1}+2x)}{\ln(\sqrt[3]{x^2-1}+x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-1}+x}{\sqrt[3]{4x^2-1}+2x} \cdot \frac{(4x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 8x+2}{(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x+1} = 1 .$$

类似地可得

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{8}})}{\ln((2x)^{\frac{1}{4}}+(2x)^{\frac{3}{8}})} = 1 .$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^{\alpha}(\sqrt[3]{4x^2-1}+2x)}{\ln^{\alpha}(\sqrt[3]{x^2-1}+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^{\beta}(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{8}})}{\ln^{\beta}((2x)^{\frac{1}{4}}+(2x)^{\frac{3}{8}})} = 1 .$$

代入(3)得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(2x)}{f(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，由推论4得此广义积分收敛.

3.7.4 评注

定理6是我们给出的，其它判别法是我们将文献[28]、[80]、[81]及定理6综合概括得到的，结果的叙述和证明与原文都有不同.

§3.8 几种重要积分的计算

3.8.1 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ 的几种计算法

积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ 在自然科学中有着广泛的应用. 这个积分是收敛的，但并不绝对收敛. 这里，我们给出这个积分的几种计算方法.

1. 考虑广义二重积分

$$I = \iint_D e^{-xy}\sin x\,dx\,dy ,$$

其中 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$. 今按两种不同的次序进行积分，得

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x\,dx \int_0^{+\infty} e^{-xy}dy$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx . \tag{1}$$

另一方面

$$I = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

比较(1)、(2)得$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

2. 考虑含参变量 α 的积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx .$$

容易证明，它在$0 \leqslant \alpha < +\infty$上连续，且当 $\alpha > 0$时满足积分号下求导的条件，故有

$$I'(\alpha) = \int_0^{+\infty} -e^{-\alpha x} \sin x dx = -\frac{1}{1+\alpha^2} .$$

由此得到 $I(\alpha) = -\operatorname{arctg}\alpha + C$. 因 $\alpha > 0$时

$$0 \leqslant |I(\alpha)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} ,$$

故$\lim\limits_{\alpha \to \infty} I(\alpha) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C$，从而 $C = \frac{\pi}{2}$. 又因 $I(\alpha)$在 $\alpha = 0$连续，故

$$\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha) = I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$= -\lim_{\alpha \to 0} \operatorname{arctg}\alpha + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} ,$$

即 $I = \frac{\pi}{2}$.

3. 在§3.6中，我们利用 Riemann 引理证明了

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$

4. 在$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$中令$(n+\frac{1}{2})t = x$，得

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2n+1}}{\sin\frac{x}{2n+1}}dx=\frac{\pi}{2}.$$

令

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\frac{x}{2n+1}}{\sin\frac{x}{2n+1}}, & 0<x\leqslant(n+\frac{1}{2})\pi,\\ 1, & x=0,\\ 0, & (n+\frac{1}{2})\pi<x<\infty.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1$，且 $\int_0^{+\infty}f_n(x)\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx&=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}f_n(x)\frac{\sin x}{x}dx\\&=\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

这里，积分与极限运算交换次序是允许的. 理由如下：对任意 $A>0$，$\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,A]$ 上一致收敛于1. 因 $\{f_n(x)\}$ 一致有界（$0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{\pi}{2}$），且 $f_n(x)$ 在 $[0,(n+\frac{1}{2})\pi]$ 上关于 x 单增，而在 $[(n+\frac{1}{2})\pi,\infty)$ 上为零，又因 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 收敛，故由积分第二中值定理与 Cauchy 收敛准则，得

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{+\infty}f_n(x)\frac{\sin x}{x}dx-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx\right|\\&\leqslant\left|\int_0^{A}\frac{\sin x}{x}[f_n(x)-1]dx\right|+\left|\int_A^{+\infty}f_n(x)\frac{\sin x}{x}dx\right|\\&\quad+\left|\int_A^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx\right|.\end{aligned}$$

因此，积分与极限运算可换.

5. 令 m,k 为自然数，$h=\frac{\pi}{k}$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\lim_{m\to+\infty}\int_0^{m\pi}\frac{\sin x}{x}dx$$

$$= \lim_{m\to+\infty}\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{km}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h. \qquad (3)$$

因为

$$\sum_{n=km}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h = \sum_{n=km}^{k(m+1)-1}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h + \sum_{n=k(m+1)}^{k(m+2)-1}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h + \cdots,$$

而从上述右端这些有穷和数为项作成的级数是交错级数，故它的和数的绝对值小于第一项的绝对值，从而

$$\left|\sum_{n=km}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h\right| \leqslant \left|\sum_{n=km}^{k(m+1)-1}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h\right|$$

$$= \sum_{n=km}^{k(m+1)-1}\frac{|\sin nh|}{nh}\cdot h \leqslant \frac{1}{m\pi}\sum_{n=km}^{k(m+1)-1}|\sin nh|\cdot h.$$

注意到

$$\lim_{h\to 0}\sum_{n=km}^{k(m+1)-1}|\sin nh|\cdot h = \int_{m\pi}^{(m+1)\pi}|\sin x|dx = 2,$$

有

$$\lim_{\substack{m\to+\infty\\ h\to 0}}\sum_{n=km}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h = 0.$$

又

$$\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{km}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h$$

存在，故可交换累次极限次序. 因此，由(3)得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{h\to 0}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{km}\frac{\sin nh}{nh}\cdot h$$

$$= \lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}.$$

由 Fourier 正弦展式知

$$\frac{\pi-h}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\quad(0<h\leqslant\pi),$$

因而得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{h\to 0}\frac{\pi-h}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

6. 设 a 是实数但不是整数. 函数 $\cos ax$ 在区间$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数展开式为

$$\cos ax=\frac{\sin a\pi}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2a\sin a\pi}{\pi(a^2-n^2)}\cos nx\ .$$

令 $x=0$,得

$$\frac{1}{\sin a\pi}=\frac{1}{a\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2a\pi}{(a\pi)^2-(n\pi)^2}\ .$$

作代换 $t=a\pi$,便得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin t}&=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2t}{t^2-(n\pi)^2}\\&=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t-n\pi}+\frac{1}{t+n\pi}\right)\ ,\end{aligned}$$

这里 t 不是 π 的倍数. 而

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{k\cdot\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\ ,$$

并对 $k=2m$ 作代换 $x=m\pi+t$,而对 $k=2m-1$作代换 $x=m\pi-t$,便得

$$\int_{2m\cdot\frac{\pi}{2}}^{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=(-1)^m\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{m\pi+t}dt\ ,$$

$$\int_{(2m-1)\frac{\pi}{2}}^{2m\cdot\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx=(-1)^{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{m\pi-t}dt\ .$$

于是有

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt+\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-1)^m\left(\frac{1}{t-m\pi}+\frac{1}{t+m\pi}\right)\sin t\,dt\ .$$

因级数 $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{t-m\pi}+\frac{1}{t+m\pi}\right)\sin t$ 在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上是一致收敛的,理由是它可以由收敛的优级数$\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2-\frac{1}{4}}$ 控制,故可以逐项积分得

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{t}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\left(\frac{1}{t-m\pi}+\frac{1}{t+m\pi}\right)\right]\sin t\,dt\ .$$

注意，方括号内的式子正是$\frac{1}{\sin t}$的展开，故

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin t}\cdot\sin t\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

这个计算法属于 Н. И. Лобачевский.

7. 我们再给出计算这个积分的一个初等方法. 为此，先证明一个比较初等的定理，然后应用这个定理于积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx \tag{4}$$

而得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

定理1 若函数 f 在区间$[a,b]$上可积且有界，则

$$\lim_{k\to+\infty}\int_a^b f(x)\frac{1-\cos kx}{k}dx=0, \tag{6}$$

证 据定理的条件，存在 M 使对一切 $x\in[a,b]$有$|f(x)|\leqslant M$，于是

$$\left|\int_a^b f(x)\frac{1-\cos kx}{k}dx\right|\leqslant\frac{2M}{k}(b-a), \tag{7}$$

在(7)中令 $k\to+\infty$，便得(6). 定理得证.

用分部积分法易证

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$$

因此，为证(4)成立，只要证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2} \tag{8}$$

即可. 为此，令

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos nx,$$

则

$$S_k(x)=\frac{1}{k}[\sigma_0(x)+\sigma_1(x)+\cdots+\sigma_{n-1}(x)]$$

$$= \frac{1}{2k}\left(\frac{\sin\frac{kx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2,$$

且

$$\int_0^{\pi} S_k(x)dx = \frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

由(9)得

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{k}\left(\frac{1-\cos kx}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)dx = \frac{\pi}{2}. \tag{10}$$

令

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}},$$

可证$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{12}$，因此，若定义 $f(0) = -\frac{1}{12}$，则 f 在$[0,\pi]$上连续，从而满足定理1的条件，于是

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)\frac{1-\cos kx}{k}dx = 0.$$

利用(10)便得

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1-\cos kx}{k}\right)dx = \frac{\pi}{2},$$

或

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\frac{kx}{2}}{kx^2}dx = \frac{\pi}{4}.$$

当$\frac{kx}{2}$用 x 替代时，上式成为

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2},$$

即(8)式成立.

3.8.2 概率积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$的新算法

概率积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$已有多种计算方法，它们各有优缺点．由于概率积分的重要性，我们再给出两种算法．

1. 令$S=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$，并考虑积分

$$S_n=\int_0^{\sqrt{n}}(1-\frac{t^2}{n})^n dt\ . \tag{11}$$

在(11)中令$t=\sqrt{n}\sin x$，得

$$S_n=\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}x dx=\frac{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdots(2n-1)}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2n+1}\ .$$

由 Wallis 公式，得$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$．因此，为证

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\ ,$$

只要证明

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$$

即可．为此，考虑

$$S-S_n=\int_0^{\sqrt{n}}\{e^{-t^2}-(1-\frac{t^2}{n})^n\}dt+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-t^2}dt\ .$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\sqrt{n}}^{+\infty} e^{-t^2}dt=0\ .$$

于是，为证$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$，只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\{e^{-t^2}-(1-\frac{t^2}{n})^n\}dt=0. \tag{12}$$

易证，$0\leqslant e^{-u}-(1-\frac{u}{n})^n\leqslant\frac{u^2}{n}e^{-u}$．由此可得

$$0\leqslant\int_0^{\sqrt{n}}\{e^{-t^2}-(1-\frac{t^2}{n})^n\}dt\leqslant\frac{1}{n}\int_0^{\sqrt{n}} t^4e^{-t^2}dt\ ,$$

而$\int_0^{+\infty} t^4e^{-t^2}dt$收敛，故由上式便知(12)成立．

上述不利用二重积分的计算法是由 Spiegel[175] 得到的.

2. 下述的一个新算法是由黄礼平[88] 提供的. 设

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt\ ,\ x\in R,$$

$$g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt\ ,\ x\in R\ .$$

显然,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处连续可导. 下面讨论 $g(x)$的情况. 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,由微分中值定理及定积分换元公式知:当 $h\neq 0$时,存在 ξ 介于 x 与 $x+h$ 之间,且 $\xi\neq 0$,使得

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}&=\int_0^1 \frac{e^{-(x+h)^2(1+t^2)}-e^{-x^2(1+t^2)}}{(1+t^2)h}dt\\&=\int_0^1 -2\xi e^{-\xi^2(1+t^2)}dt=-2e^{-\xi^2}\int_0^1 \xi e^{-\xi^2t^2}dt\\&=-2e^{-\xi^2}\int_0^{\xi}e^{-u^2}du=-2e^{-\xi^2}f(\xi)\ .\end{aligned}$$

因为$-2e^{-x^2}f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处连续,且显然当 $h\to 0$时必有 $\xi\to x$,所以在上式中令 $h\to 0$知

$$g'(x)=-2e^{-x^2}f(x)=(-f^2(x))'\ .$$

因此,

$$(g(x)+f^2(x))'\equiv 0\ ,\ g(x)+f^2(x)\equiv C\ .$$

令 $x=0$得

$$C=g(0)=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=\frac{\pi}{4}\ ,$$

故

$$f^2(x)=\frac{\pi}{4}-g(x)\ . \tag{13}$$

又因为

$$0\leqslant g(x)\leqslant e^{-x^2(1+\eta^2)}\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt\to 0\ ,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$,于是在(13)式中令 $x\to+\infty$,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^2(x)=\pi/4$. 因此,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=I$,故 $I^2=\pi/4$,从而

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

上面的计算法实际上没有用到参变量积分或者一致收敛性的知识，也不必事先证明$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$的收敛性．所用到的预备知识仅仅是初等一元微积分中的基本知识．

3.8.3 Euler 积分新算法

这里，我们给出计算下述积分的一个有效方法：

$$f(a) = \int_0^1 \frac{\ln(x^2 - 2x\cos a + 1)}{x}dx \quad (0 \leqslant a \leqslant 2\pi), \tag{14}$$

利用这个结果立刻可以得到下面三个熟知的 Euler 积分的值：

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = -\frac{1}{6}\pi^2, \tag{15}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \frac{1}{12}\pi^2, \tag{16}$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x}dx = \frac{1}{24}\pi^2. \tag{17}$$

这里所用的方法与众不同，利用求解某个单变量的函数方程而得到(14)的值，且在计算过程中无须用到(15)、(16)、(17)的任一个结果．

定理2 对于如(14)定义的$f(a)$，有

$$f(a) = -\frac{(a-\pi)^2}{2} + \frac{\pi^2}{6}. \tag{18}$$

证 利用恒等式

$$(x^2 - 2x\cos a + 1)(x^2 + 2x\cos a + 1) = x^4 - 2x^2\cos 2a + 1,$$

可以得到

$$f(\frac{a}{2}) + f(\pi - \frac{a}{2})$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(x^2 - 2x\cos\frac{a}{2} + 1)(x^2 + 2x\cos\frac{a}{2} + 1)}{x}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(x^4 - 2x^2\cos a + 1)}{x} dx .$$

令 $x = \sqrt{t}$，便得

$$f(\frac{a}{2}) + f(\pi - \frac{a}{2})$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(t^2 - 2t\cos a + 1)}{t} dt$$
$$= \frac{f(a)}{2} ,$$

即 $f(a)$在区间$[0,2\pi]$上满足函数方程

$$f(\frac{a}{2}) + f(\pi - \frac{a}{2}) = \frac{f(a)}{2} . \tag{19}$$

由在积分号下求导数的基本定理可知，$f(a)$是二次连续可导的. 对(19)式关于 a 求导二次得到

$$f''(\frac{a}{2}) + f''(\pi - \frac{a}{2}) = 2f''(a) . \tag{20}$$

由于 $f''(a)$也是闭区间$[0,2\pi]$上的连续函数，因而 $f''(a)$在$[0,2\pi]$上有最大值 M 和最小值 m. 设对 $a_0 \in [0,2\pi]$有 $f''(a_0) = M$，则在(20)中置 $a = a_0$，又得到

$$f''(\frac{a_0}{2}) + f''(\pi - \frac{a_0}{2}) = 2M . \tag{21}$$

因有$\frac{a_0}{2} \in [0,2\pi]$以及$(\pi - \frac{a_0}{2}) \in [0,2\pi]$，故

$$f''(\frac{a_0}{2}) \leqslant M , \quad f''(\pi - \frac{a_0}{2}) \leqslant M , \tag{22}$$

从而

$$f''(\frac{a_0}{2}) + f''(\pi - \frac{a_0}{2}) \leqslant 2M . \tag{23}$$

由(21)、(22)和(23)可知必有 $f''(\frac{a_0}{2}) = M$. 利用迭代法可知

$$f''(a_0) = f''(\frac{a_0}{2^n}) = M .$$

再由 $f''(a)$的连续性得

$$\lim_{n\to\infty} f''\left(\frac{a_0}{2^n}\right) = f''(0) = M .$$

类似地可得到 $f''(0)=m$，于是 $M=m$，$f''(a)$在$[0,2\pi]$中为常数，$f(a)$就是一个二次多项式：

$$f(a) = \frac{\alpha}{2}a^2 + \beta a + \gamma . \tag{24}$$

最后就是要定出常数 α,β 和 γ. 将(24)代入(19)，令 a 的系数和常数项分别相等，便得到

$$-\frac{\pi}{2}\alpha = \frac{\beta}{2}, \quad \frac{\pi^2}{2}\alpha + \beta\pi + 2\gamma = \frac{\gamma}{2}, \tag{25}$$

注意 a^2的系数相抵消. 由(14)及由积分号下求导的基本定理，得到 $f'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$. 利用(24)，就意味着

$$\frac{\pi}{2}\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} . \tag{26}$$

由(25)和(26)可以解出 $\alpha=-1,\beta=\pi,\gamma=-\frac{\pi^2}{3}$. 将它们代入(24)而得(18). 这就完成了定理2的证明.

在(14)和(18)中分别置 a 为$0,\pi,\frac{\pi}{2}$，就可以得到 Euler 积分(15)、(16)、(17)的值.

3.8.4 Froullani 积分的推广

关于广义积分$\int_0^\infty [f(ax) - f(bx)]\frac{dx}{x}$ 的计算，有著名的 Froullani 公式：

$$\int_0^\infty [f(ax) - f(bx)]\frac{dx}{x} = f(0)\ln\frac{b}{a} . \tag{27}$$

比较一般的结果是

$$\int_0^\infty [f(ax) - f(bx)]\frac{dx}{x} = [f(0) - f(\infty)]\ln\frac{b}{a} . \tag{28}$$

我们自然要问：式中的线性函数 ax 与 bx 可否用较为一般的函数 $p_1(x)$与 $p_2(x)$来代替，从而得到更为一般的结果？下面的定理3给出了肯定的回答，从而推广了公式(27)与(28).

定理3 设 f 是$[0,+\infty)$上的连续函数，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty)$存在，$P_1$与 P_2是$(0,+\infty)$上二个连续可导的正值函数且$\lim\limits_{x\to0^+} P_i(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} P_i(x)=+\infty$ $(i=1,2)$，若$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}=\lambda_0\neq0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}=\lambda_1\neq0$存在，则

$$\int_0^{+\infty}\left(f(P_1(x))\frac{P'_1(x)}{P_1(x)}-f(P_2(x))\frac{P'_2(x)}{P_2(x)}\right)dx$$
$$=f(0)\ln\lambda_0-f(+\infty)\ln\lambda_1.$$

证 令

$$I_{\delta w}=\int_\delta^w\left(f(P_1(x))\frac{P'_1(x)}{P_1(x)}-f(P_2(x))\frac{P'_2(x)}{P_2(x)}\right)dx\ ,\ 0<\delta<w$$

据换元法可得

$$I_{\delta w}=\int_{P_1(\delta)}^{P_1(w)}f(y)\frac{dy}{y}-\int_{P_2(\delta)}^{P_2(w)}f(y)\frac{dy}{y}$$
$$=\int_{P_1(\delta)}^{P_2(\delta)}f(y)\frac{dy}{y}-\int_{P_1(w)}^{P_2(w)}f(y)\frac{dy}{y}\ .\qquad(29)$$

由积分中值定理，存在 $P_\delta\in(P_1(\delta),P_2(\delta))$及 $P_w\in(P_1(w),P_2(w))$使得

$$I_{\delta w}=f(P_\delta)\ln\frac{P_2(\delta)}{P_1(\delta)}-f(P_w)\ln\frac{P_2(w)}{P_1(w)}\ .$$

由条件可得

$$\int_0^{+\infty}(f(P_1(x))\frac{P'_1(x)}{P_1(x)}-f(P_2(x))\frac{P'_2(x)}{P_2(x)})dx=\lim_{\substack{\delta\to0\\w\to+\infty}}I_{\delta w}$$
$$=f(0)\ln\lambda_0-f(+\infty)\ln\lambda_1\ .$$

定理得证.

如果定理3中的条件$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P_2(x)}{P_1(x)}=\lambda_1$存在，用$\int_\eta^{+\infty}f(x)\dfrac{dx}{x}$收敛代替，其中$\eta>0$，则有

$$\int_0^{+\infty}(f(P_1(x))\frac{P'_1(x)}{P_1(x)}-f(P_2(x))\frac{P'_2(x)}{P_2(x)})dx=f(0)\ln\lambda_0\quad(30)$$

事实上由(29)，此时

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ w\to+\infty}} I_{\delta w}=\lim_{\delta\to 0}\int_{P_1(\delta)}^{P_2(\delta)} f(y)\,\frac{dy}{y}$$
$$=\lim_{\delta\to 0} f(P_\delta)\ln\frac{P_2(\delta)}{P_1(\delta)}$$
$$=f(0)\ln\lambda_0,$$

即(30)成立.

3.8.5 Fresnel 积分新算法

利用极坐标推导$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$的标准方法能用来计算 Fresnel 积分$F_0=\int_0^{\infty}\cos x^2dx$与$G_0=\int_0^{\infty}\sin x^2dx$,但在计算时常常要涉及复指数. 下面,我们介绍一种计算方法,它不涉及复指数.

首先来建立三个关系式:① $G_0>0$,② $F_0^2-G_0^2=0$,③ $2F_0G_0=\frac{\pi}{4}$.

由上述三个关系式即可求得 F_0 与 G_0. 事实上,从 ① 与 ③ 可得 $F_0>0$,于是由 ② 得 $F_0=G_0$,再由 ③ 得 $F_0=G_0=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

考虑 $F(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos x^2dx$, $G(t)=\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\sin x^2dx$. 令 $a_n(t)=(-1)^n\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} e^{-tx^2}\sin x^2dx$, 则当 $t\in[0,+\infty)$ 时,$G(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n(t)$. 做变换 $x=\sqrt{y+n\pi}$,我们有

$$a_n(t)=\int_0^{\pi}\frac{e^{-t(y+n\pi)}\sin y}{2\sqrt{y+n\pi}}dy>0.$$

显然 $a_n(t)>a_{n+1}(t)$,所以当 $t\in[0,+\infty)$时 $G(t)$与 $a_0(t)$同号且

$$\left|G(t)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k(t)\right|\leqslant a_{n+1}(t)<\frac{1}{2\sqrt{(n+1)\pi}}.$$

故 $G_0=G(0)>0$且 $G(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n(t)$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛. 因此 $G(t)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续. 通过

$$F(t)=\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}e^{-tx^2}\cos x^2dx+\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sqrt{(n+\frac{1}{2})\pi}}^{\sqrt{(n+1+\frac{1}{2})\pi}}e^{-tx^2}\cos x^2dx$$

可类似地得到 $F(t)$在$[0,+\infty)$上连续，对 $t>0$，有

$$\begin{aligned}F^2-G^2&=\left(\int_0^{\infty}e^{-tx^2}\cos x^2dx\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-ty^2}\cos y^2dy\right)\\&\quad-\left(\int_0^{\infty}e^{-tx^2}\sin x^2dx\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-ty^2}\sin y^2dy\right)\\&=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0\\y\geqslant 0}}e^{-t(x^2+y^2)}(\cos x^2\cos y^2-\sin x^2\sin y^2)dxdy\\&=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0\\y\geqslant 0}}e^{-t(x^2+y^2)}\cos(x^2+y^2)dxdy\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\infty}re^{-tr^2}\cos r^2dr\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}e^{-tx}\cos xdx\\&=\frac{\pi}{4}\frac{t}{1+t^2}.\end{aligned}$$

类似地，有

$$\begin{aligned}2FG&=\iint\limits_{\substack{x\geqslant 0\\y\geqslant 0}}e^{-t(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)dxdy\\&=\frac{\pi}{4}\frac{1}{1+t^2}.\end{aligned}$$

于是得出

$$[f(t)]^2-[G(t)]^2=\frac{\pi}{4}\frac{t}{1+t^2},$$

$$2F(t)G(t)=\frac{\pi}{4}\frac{1}{1+t^2}.$$

令 $t\to 0$，由 $F(t)$与 $G(t)$的连续性即得

$$F_0^2-G_0^2=0 \text{ 与 } 2F_0G_0=\frac{\pi}{4}.$$

3.8.6 Γ函数的特征

由含参变量积分定义的Γ函数

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx \quad (\alpha>0)$$

是一个重要的函数，它在$(0,+\infty)$上连续可导，并具有下面主要性质：

(i) $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，

(ii) $\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})=\frac{2\sqrt{\pi}}{4^{\alpha}}\Gamma(2\alpha)$，

(iii) $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi}$，$0<\alpha<1$.

那么当$(0,+\infty)$上的连续可微函数Φ满足(i)、(ii)和(iii)时，Φ是否恒为Γ函数？易知(ii)和(iii)意味着

$$\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})=\Gamma(2\alpha)\Gamma(1-\alpha)\frac{2\sin\alpha\pi}{4^{\alpha}\sqrt{\pi}}.$$

以这个较弱的条件代替(ii)和(iii)我们有

定理4 设f是$(0,+\infty)$上的连续可导函数，且满足

(I) $f(\alpha+1)=\alpha f(\alpha)$，

(II) $f(\alpha+\frac{1}{2})=f(2\alpha)f(1-\alpha)\frac{2\sin\alpha\pi}{4^{\alpha}\sqrt{\pi}}$，$0<\alpha<1$，

(III) $f(1)=\lim\limits_{\alpha\to 1}f(\alpha)\neq 0$，

则$f(\alpha)\equiv\Gamma(\alpha)$.

证 首先证明对任意$\alpha>0$，$f(\alpha)>0$.

由$f(1)\neq 0$及$f(x)$连续，存在$\delta>0$，使得对任意的$\alpha\in[1-\delta,1]$，$f(\alpha)\neq 0$，所以对任意的$\alpha\in[\frac{1}{2}-\delta,\frac{1}{2}]$，(II)式左端不为0，从而右端也不为0，这意味着$f(2\alpha)\neq 0$，此即对任意的$\alpha\in[1-2\delta,1]$，$f(\alpha)\neq 0$. 用归纳法可证，对任意的自然数n，都有$f(\alpha)\neq 0$，$\alpha\in[1-2^{n}\delta,1]\cap(0,1]$，由此可知$f$在$(0,1]$上恒不为0，在(II)取$\alpha=\frac{1}{2}$可得$f(\frac{1}{2})>0$. 又由$f$在$(0,1]$上连续便得$f(\alpha)>0$，$\alpha\in(0,$

1]，再由(I)即可递推得到，$f(\alpha)>0,\alpha\in(0,+\infty)$.

其次证明 $f(\alpha)\equiv\Gamma(\alpha)$.

设 $f(\alpha)=g(\alpha)\Gamma(\alpha)$，由定理的条件及 $\Gamma(\alpha)$ 满足(i)、(ii)和(iii)可以验证 $g(\alpha)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数，并且对 $\alpha>0,g(\alpha)>0$，此外 $g(\alpha)$ 还满足：

(I_0) $g(\alpha+1)=g(\alpha)$；

(II_0) $g(\alpha+\frac{1}{2})=g(2\alpha)g(1-\alpha)$.

在(I_0)中令 $\alpha\to0$，便得 $\lim\limits_{\alpha\to0}g(\alpha)=g(1)$，如取 $g(0)=g(1)$，据(I_0)可得 $g(\alpha)$ 在$[0,+\infty)$上连续可导. 利用递推公式(I_0)可将 $g(\alpha)$ 保持连续可导性而延拓到 $(-\infty,0)$ 上. 容易验证这样延拓后的 $g(\alpha)$ 仍满足(I_0)和(II_0). 令 $h(\alpha)=\ln g(\alpha)$，则 $h(\alpha)$ 在$(-\infty,+\infty)$上连续可导，且 $h(1)=\ln g(1)=\ln\frac{f(1)}{\Gamma(1)}=\ln\frac{1}{\Gamma(1)}=0$. 不难验证 $h(\alpha)$ 还满足：

(I_1) $h(\alpha+1)=h(\alpha)$，

(II_1) $h(\alpha+\frac{1}{2})=h(2\alpha)+h(1-\alpha)$.

令 $k(\alpha)=h'(\alpha)$，则 $k(\alpha)$ 为$(-\infty,+\infty)$上的连续函数，且满足

(I_2) $k(\alpha+1)=k(\alpha)$，

(II_2) $k(\alpha+\frac{1}{2})+k(1-\alpha)=2k(2\alpha)=2k(2\alpha+\frac{1}{2})$.

以 α 代(II_2)中的 $\alpha+\frac{1}{2}$，并利用(I_2)得

(II') $k(\alpha)+k(\frac{1}{2}-\alpha)=2k(2\alpha)$.

由(I_2)知，$k(\alpha)$ 是$(-\infty,+\infty)$上周期为1的连续周期函数，所以有 $\alpha_0>0$ 使 $k(\alpha_0)$ 为 $k(\alpha)$ 在$(-\infty,+\infty)$上的最大值. 利用(II'_2)容易验证，$k(\frac{\alpha_0}{2})=k(\alpha_0)$. 在此基础上，用归纳法可证得，对一切自然数 n 都有 $k(\frac{\alpha_0}{2^n})=k(\alpha_0)$. 所以 $k(\alpha_0)=\lim\limits_{n\to\infty}k(\frac{\alpha_0}{2^n})=k(0)$. 这说明 $k(0)$ 是 $k(\alpha)$ 在$(-\infty,+\infty)$的最大值. 同理可得 $k(0)$ 也是 $k(\alpha)$ 在(—

$\infty,+\infty)$上的最小值. 故 $k(\alpha)=h'(\alpha)$是常值函数，所以 $h(\alpha)=a\alpha+b$，其中 a,b 为常数. 再由 $h(0)=h(1)=0$得 $a=b=0$. 故 $h(\alpha)=\ln g(\alpha)\equiv 0$，即 $g(\alpha)\equiv 1$. 所以 $f(\alpha)=\Gamma(\alpha)$.

3.8.7 定积分的公理定义

用 $B[a,b]$和 $R[a,b]$分别表示$[a,b]$上所有有界函数和所有 Riemann 可积函数构成的集合. 区间$[a,b]$上的定积分可看成 $R[a,b]$到$(-\infty,+\infty)$中的映射，即

$$R[a,b]\to(-\infty,+\infty),$$

$$f\longmapsto\int_a^b f(x)dx.$$

它满足下面我们熟知的性质：

(a) $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$；

(b) 当 f 非负时，$\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$；

(c) 对任意的 $c\in[a,b]$，$\int_a^c dx=c-a$.

对任何 $A\subset[a,b]$，记

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$$

则(c)可改为

(c′) 对任何 $c\in[a,b]\int_a^b\chi_{[a,c]}(x)\,dx=c-a$.

由此作如下猜测，如果映射 $I:B[a,b]\to(-\infty,+\infty)$ 满足：

(a°) $I(\alpha f+\beta g)=\alpha I(f)+\beta I(g)$，$f,g\in B[a,b]$，$\alpha,\beta\in(-\infty,+\infty)$；

(b°) 当 $f\in B[a,b]$ 且 $f\geqslant 0$ 时，$I(f)\geqslant 0$；

(c°) 对任何 $c\in[a,b]$，$I(\chi_{[a,c]})=c-a$.

那么是否有 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$，$f\in R[a,b]$?

关于这个问题我们有下面的定理.

定理 5 设 I 是由 $B[a,b]$到$(-\infty,+\infty)$ 中的映射，且满足

(a°)、(b°) 和(c°),则对任何 $f\in R[a,b]$,$I(f)=\int_a^b f(x)dx$.

证 对任何 $c\in[a,b]$ 及自然数 n,显然有 $\chi_{[a,c-\frac{1}{n}]}(x)\leqslant\chi_{[a,c)}(x)\leqslant\chi_{[a,c]}(x)$. 由(b°)和(c°)得 $c-a-\frac{1}{n}\leqslant I(\chi_{[a,c)})\leqslant c-a$. 令 $n\to\infty$ 得 $I(\chi_{[a,c)})=c-a$,据此可得对 $[a,b]$ 中任意两个数 c,d,有

$$I(\chi_{[c,d)})=I(\chi_{[a,d)})-I(\chi_{[a,c)})=d-c\ , \tag{30}$$

$$I(\chi_{\{d\}})=I(\chi_{[a,d]})-I(\chi_{[a,d]})=0\ . \tag{31}$$

任取 $f\in R[a,b]$,对 $[a,b]$ 的任一分划 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 记 m_i 和 M_i 分别为 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的下确界和上确界($i=1,\cdots,n$). 易知

$$m_nI_{\{b\}}(x)+\sum_{i=1}^{n}m_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)\leqslant f(x)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\chi_{[x_{i-1},x_i]}(x)+M_n\chi_{\{b\}}(x)\ ,$$

由(a°)、(b°)、(30)及(31)可得

$$\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant I(f)\leqslant M_i\Delta x_i.$$

由于 f 在 $[a,b]$ 上可积,所以

$$\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\lim_{\|T\|\to0}\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx\ .$$

综上所述即得 $I(f)=\int_a^b f(x)dx$.

3.8.8 评注

定理2来源于文献[128]. 定理3是由 Tricomi[177]得到的. 定理4取材于文献[57],其中 $g(\alpha)\equiv1$ 部分的证明是我们给出的. 如果定理4的条件减弱为仅具 Γ 函数的性质(i)和(ii),结果将不再成立,比如 $\Phi(\alpha)=\Gamma(\alpha)\times(4\sin^2\alpha\pi)^{\mu}(\mu>0)$;仅具备(ii)和(iii)也不行,比如 $\Phi(\alpha)=\Gamma(\alpha)t^{\alpha-\frac{1}{2}}(t>0)$;只有条件(i)和(iii)也不够,因为当 $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$ 时,$\Phi(\alpha)$ 的值可以任意给定. 定理5是我们给出的,这

一定理说明 Riemann 积分可通过公理的形式给出，并由此把定积分推广到一般的有界函数；适当改变映射 I 的定义域还可得到其它一些积分. 类似地还可考虑是否能通过公理的形式定义极限与导数等概念的问题.

第四章　级　数

§4.1　导读

本章主要介绍有关数项级数、函数项级数、幂级数和 Fourier 级数中的一些问题．§4.2 介绍正项级数的一些敛散性判别法，并对不同判别法的强弱性及某些判别法的等价性进行研究，给出数项级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的充要条件．本节还介绍级数绝对收敛的导数判别法，讨论两个级数的 Cauchy 乘积的敛散性，无穷级数与广义积分收敛的某些必要条件，以及无穷级数的积分判别法的推广．

§4.3 介绍函数项级数的 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的充要条件，指出以单调函数为通项且处处收敛的函数项级数，其关于可微性的 Fubini 定理不能推广到有界变差函数类中，介绍函数项级数亚一致收敛概念及其判别法和一些有关的性质，还介绍一致可积和局部一致收敛概念，并推广通常的关于积分号下取极限和逐项微分等重要定理．

§4.4 介绍幂级数逐项微分定理的一个简单证明和 Taylor 公式的另一种证明，以及 Taylor 公式的几种推广，并巧妙地利用 Rolle 定理得到更普遍的余项公式，探讨当区间长度趋于零时，余项中的中间点的渐近性态，还证明每个幂级数必是某个函数的 Taylor 级数．

§4.5 说明存在系数趋于零的三角级数，并明确解答了它本身在一个正测度集上是否发散的问题．另外，还利用 Riemann 引理，巧妙地引入辅助函数，给出 Fourier 级数收敛定理的新证明．

§4.2 数项级数

4.2.1 正项级数敛散性判别法

定理1 设给定正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，满足 $a_{n+1}\leqslant a_n(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}/a_n=\rho$，则当 $\rho<1/2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\rho>1/2$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；当 $\rho=1/2$ 时不能判定．

证 当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}/a_n=\rho<1/2$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}2a_{2n}/a_n=2\rho<1.$$

取 $n=2^k$，k 为自然数，则

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}a_{2^{k+1}}}{2^ka_{2^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{2a_{2\cdot 2^k}}{a_{2^k}}=2\rho<1.$$

故由 D'Alembert 判别法知 $\sum_{k=1}^{\infty}2^ka_{2^k}$ 收敛．我们知道，若 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{k=1}^{\infty}2^ka_{2^k}$ 收敛(参看[43]，p. 327)，故知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．

同理可证当 $\rho>\frac{1}{2}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．

注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$，二者均有 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\frac{1}{2}$，但前者发散而后者收敛，故当 $\rho=\frac{1}{2}$ 时此判别法失效．定理得证．

容易证明，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n=\rho<1$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}/a_n=0.$$

事实上，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}/a_n=\rho<1$，则对任意的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1-\rho)$，存在自然数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时恒有

$$a_{n+1}<(\rho+\varepsilon)a_n, a_{n+2}<(\rho+\varepsilon)a_{n+1}, \cdots,$$

从而有 $a_{2n}<(\rho+\varepsilon)^n a_n$，这表明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}/a_n=0$.

同理可证，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n=\rho>1$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n}/a_n=+\infty .$$

由此可见，对满足条件 $a_{n+1}\leqslant a_n$ 的正项级数，凡能用 D'Alembert 判别法判断的都可用定理 1 给出的法则判断.

考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n/n!e^n$，利用 $e>(1+\frac{1}{n})^n$ 可直接推出 $n^n/n!e^n>(n+1)^{n+1}/(n+1)!e^{n+1}$，且有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{2n}e^n}{n^n e^{2n}}\cdot\frac{n!}{(2n)!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)^{2n}e^n}{n^n e^{2n}}\cdot\frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}e^{-2n}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2},$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n/n!e^n$ 发散，但对此级数，D'Alembert 判别法就无法判断其敛散性. 这表明对于满足条件 $a_{n+1}\leqslant a_n$ 的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，定理 1 给出的判别法较 D'Alembert 判别法更为广泛.

在定理 1 中若去掉关于级数通项的单调性假设，则有

定理 2 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_n}=\rho ,$$

则当 $\rho<1/2$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；当 $\rho>1/2$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散；当 $\rho=1/2$ 时不能用此法判定.

关于定理 2 的证明可参看[39].

在正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 敛散性判别法中，Raabe 和 Gauss 判别法是

比较精细的．但由于它们是建立在$\{a_n\}$单调，且当$n\to\infty$时a_n/a_{n+1}有一定的渐近性的基础之上，所以稍微破坏了这种较强的条件，这两个判别法就不适用了．例如，用这两个方法，都不能判断$\sum_{n=2}^{\infty}[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}]^n$的敛散性，其中$\pi(n)$为不超过$n$的素数个数．

我们向读者介绍两个判别法，这两个判别法既保留了Raabe和Gauss判别法的优点，同时又避免了它们的弱点，且可比较容易地解决级数$\sum_{n=2}^{\infty}[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}]^n$的敛散性．

定理3 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是正项级数．若存在常数$\alpha>1$及自然数N，当$n>N$时有

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant\alpha,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，若存在N，当$n>N$时有

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\leqslant 1,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散．

证 由$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant\alpha>1\ (n>N)$，得

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant 1-\frac{\alpha\ln n}{n}<e^{-\frac{\alpha\ln n}{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}}\ (n>N),$$

即$a_n<\frac{1}{n^\alpha}$．由于当$\alpha>1$时$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$收敛，可知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛．

由$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\leqslant 1\ (n>N)$得$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1-\frac{\ln n}{n}$．注意到

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n\ln n}}=e^{-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{n}}$$

$$=1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{n}+o(\frac{\ln\ln n}{n}),$$

便知存在$N_1>N$，当$n>N_1$时，

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n\ln n}}<1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{2n}<\sqrt[n]{a_n},$$

即 $a_n>\frac{1}{n\ln n}$，而 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散，故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散，证毕.

定理 3 的极限形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数. 若

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha,$$

则当 $\alpha>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\alpha<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

利用类似的方法，可以证明

定理 4 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数. 若存在常数 $\beta>1$ 及自然数 N，当 $n>N$ 时，有

$$(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln\ln n}\geqslant\beta,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；若存在 N，当 $n>N$ 时，有

$$(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln\ln n}\leqslant 1,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

定理 4 的极限形式：设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数. 若

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln\ln n}=\beta,$$

则当 $\beta>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\beta<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

由上可知，Raabe 和 Gauss 判别法是定理 3 和定理 4 的直接推论.

注 1 定理 1 选自文献[14]，尔后为周肇锡[64]推广；定理 2 选自文献[39]. 定理 3 和定理 4 的材料来源于文献[76].

注 2 王济平[7]介绍了正项级数敛散性的一个比较定理，并

由此导出一些较强的判别法，凡能用 D'Alembert 判别法、Cauchy 判别法、Raabe 判别法和 Bertrand 判别法判断正项级数的敛散性，都能用王济平介绍的方法去判断，反之不然．

设有两个正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (1)$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (2)$$

对给定的自然数 $m \geqslant 2$ 和整数 r，当 n 充分大时，记 $n^* = [\frac{n+r}{m}]$，$w_n = \frac{a_n}{a_n^*}$．例如，当 $m=2$ 时，$w_n = \frac{a_n}{a_n^*}$ 可分解成两个式子：

当 $r=2s$ 时，$w_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_{n+s}}$，$w_{2n+1} = \frac{a_{2n+1}}{a_{n+s}}$；

当 $r=2s+1$ 时，$w_{2n} = \frac{a_{2n}}{a_{n+s}}$，$w_{2n+1} = \frac{a_{2n+1}}{a_{n+1+s}}$．

一般地，对给定的 m 和 r，$w_n = \frac{a_n}{a_n^*}$ 分解成 m 个式子．

定理 5 对给定的 m 和 r，当 n 充分大时，若不等式

$$\frac{a_n}{a_n^*} \leqslant \frac{b_n}{b_n^*}$$

成立，则级数(2)收敛蕴涵级数(1)收敛；级数(1)发散蕴涵级数(2)发散．

当 $m=1$，$r=-1$ 时，$n^* = n-1$，便是熟知的比较判别法．

以定理 5 为依据，下述判别法成立．

定理 6 对给定的 m 和 r，当 n 充分大时，若不等式

$$\frac{a_n}{a_n^*} \leqslant w < \frac{1}{m}$$

成立，则级数(1)收敛；若 $\frac{a_n}{a_n^*} \geqslant \frac{1}{m}$，则级数(1)发散．

注 3 关于正项级数发散判别法，Post[162]，尔后 Borwein 和 Meir[107]得到如下结果：

定理 7 设 f 是映自然数集到其自身的映射，$0\leqslant\lambda_n\leqslant 1$，且 $f(n+1)-f(n)\geqslant n\lambda_n+1$. 若 $\{a_n\}$ 满足

$$0<a_n\leqslant a_{n+1}+\lambda_n a_{f(n)},n=1,2,\cdots,$$

则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$.

特别，当 $\lambda_n=1$ $(n=1,2,\cdots)$ 时，定理 7 就是 Post[162] 的一个结果.

4.2.2 几种正项级数判别法的比较

对给定的正项级数，在某些判别法下可确定其敛散性，而用另一些判别法却不能断定，这就是所谓判别法的强弱问题.

判别法的强弱问题与建立它时所依据的标准级数的收敛速度有关. 例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n(0<r<1)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(s>1)$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ $(\alpha>1)$ 是后一个较前一个收敛得慢. 因此，分别以上述级数为标准建立的各类正项级数判别法是后一类较前一类要强.

然而，人们自然要问：以同一标准级数所建立的不同的判别法之间是否也存在适用范围不同的问题？这个问题的答案是肯定的. 例如，D'Alembert 判别法和 Cauchy 判别法都是以几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 为标准建立的判别法，已有定理和反例从正反两方面说明：Cauchy 判别法要强于 D'Alembert 判别法.

这里，我们研究另外两组判别法的比较.

一、以 s 次幂调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ 为标准建立的两个判别法及其比较.

I. Raabe 判别法. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})=\overline{p},\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\,n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})=\underline{p},$$

则当 $\underline{p}>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $\overline{p}<1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

关于 Raabe 判别法的证明可参看[99].

II. 对数判别法. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \bar{q}, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \underline{q},$$

则当 $\underline{q} > 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $\bar{q} < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 当 $\underline{q} > 1$ 时,可取 $\varepsilon_0 > 0$,使 $\underline{q} > 1 + \varepsilon_0$. 于是,存在自然数 N,当 $n > N$ 时有

$$\frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} > 1 + \varepsilon_0.$$

因此,当 $n > N$ 时,有 $a_n < 1/n^{1+\varepsilon_0}$,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 同理可证,当 $\bar{q} < 1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 8 对数判别法强于 Raabe 判别法,即对于正项级数,如能用 Raabe 判别法确定其敛散性,则必可用对数判别法确定之.

证 只须证明如下不等式:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

我们仅证明第一个不等式,第二个不等式是平凡的,而第三个不等式类似于第一个不等式的证明.

令 $\underline{\lim_{n\to\infty}} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = A$,不妨设 $A > -\infty$. 任取 B 使 $-\infty < B < A$,则存在自然数 N,当 $n \geqslant N$ 时有

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geqslant B,$$

即 $a_{n+1} \leqslant (1 - B/n)a_n$. 由此可知,对任意自然数 M,有

$$a_{N+k+1} \leqslant (1 - B/(N+k))a_{N+k}, \quad k = 0,1,\cdots,M-1,$$

因而得到

$$a_{N+M} \leqslant (1 - B/N) \cdots (1 - B/(N + M - 1))\, a_N.$$

由 M 的任意性知，当 $n \geqslant N$ 时，总有

$$a_n \leqslant (1 - B/N) \cdots (1 - B/(n - 1))\, a_N,$$

即 $\dfrac{1}{a_n} \geqslant \dfrac{1}{(1-B/N) \cdots (1-B/(n-1))\, a_N}$，所以

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n},$$

其中 $x_n = (1-B/N) \cdots (1-B/(n-1))a_N$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-\ln x_{n+1}) - (-\ln x_n)}{\ln(n+1) - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln(1 - B/n)}{\ln(1 + 1/n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n\ln(1 - B/n)}{\ln(1 + 1/n)^n}) = B \lim_{n\to\infty} \ln(1 - B/n)^{-n/B} = B,$$

应用 Stolz 定理得到 $-\ln x_n/\ln n \to B$，于是

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\ln x_n}{\ln n} = B,$$

从而有 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \geqslant B$. 由于此式对一切 $B < A$ 均成立，故

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} \geqslant A = \varliminf_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}).$$

定理得证.

现给出一个反例，以说明定理 8 之逆不真.

例 1 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-[(-1)^n + \ln n]}$. 应用对数判别法，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(-1)^n + \ln n]}{\ln n} = \ln 3 > 1,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} 3^{-2+\ln\frac{n}{n+1}}, & n \text{ 为奇数}, \\ 3^{2+\ln\frac{n}{n+1}}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$$

故有 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} n(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}) = +\infty$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} n(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}) = -\infty$. 因此，用 Raabe 判别法是无法确定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{-[(-1)^n+\ln n]}$ 的敛散性的.

二、以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ 为标准建立的两个判别法及其比较.

III. Gauss 判别法. 设 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 是正项级数. 若

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right]=\underline{\rho},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right]=\overline{\rho},$$

则当 $\underline{\rho}>1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $\overline{\rho}<1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 发散.

证 若 $\underline{\rho}>1$，则存在 s 使 $\underline{\rho}>s>1$，且存在自然数 N，当 $n>N$ 时有

$$\ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right]>s,$$

即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1-\frac{1}{n}-\frac{s}{n\ln n}$. 记 $b_n=\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ $(s>\alpha>1)$，则

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=1-\frac{1}{n}-\frac{\alpha}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

于是 $\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{b_{n+1}}{b_n}$，从而由 $\sum_{n=2}^{\infty}b_n$ 收敛导出 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛.

同理可证，当 $\overline{\rho}<1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 发散.

IV. 拟对数判别法. 设 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 是正项级数，若

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln(1/na_n)}{\ln(\ln n)}=\overline{\delta},\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln(1/na_n)}{\ln(\ln n)}=\underline{\delta},$$

则当 $\underline{\delta}>1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛；当 $\overline{\delta}<1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ 发散.

证 当 $\underline{\delta}>1$ 时，可取 $\varepsilon_0>0$ 使 $\underline{\delta}>1+\varepsilon_0$，故存在自然数 N，当 $n>N$ 时有

$$\frac{\ln(1/na_n)}{\ln(\ln n)}>1+\varepsilon_0,$$

即 $\ln(1/na_n)>\ln(\ln n)^{1+\varepsilon_0}$，故 $1/na_n>(\ln n)^{1+\varepsilon_0}$. 由此又推出

$$a_n < \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon_0}}.$$

于是由 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon_0}}$ 的收敛性导出 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛.

类似地可证当 $\delta < 1$ 时 $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 发散.

定理 9 Gauss 判别法弱于拟对数判别法，即凡能用 Gauss 判别法确立其敛散性的正项级数必可用拟对数判别法确立之.

证 只须证明如下不等式：

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right] \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/na_n)}{\ln(\ln n)}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/na_n)}{\ln(\ln n)} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right].$$

我们仅证明第一个不等式，第二个不等式是平凡的，而第三个不等式类似于第一个不等式的证明. 不妨设

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right] = A > -\infty.$$

任取 B 使 $-\infty < B < A$，则存在自然数 N，使得当 $n \geqslant N$ 时，有

$$\ln n\left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-1\right] \geqslant B.$$

由此得到 $a_{n+1} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}-\frac{B}{n\ln n}\right)a_n$，因而

$$a_n \leqslant \left(1-\frac{1}{N}-\frac{B}{N\ln N}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-1}-\frac{B}{(n-1)\ln(n-1)}\right)a_N.$$

记 $x_n = \left(1-\frac{1}{N}-\frac{B}{N\ln N}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-1}-\frac{B}{(n-1)\ln(n-1)}\right)a_N$，

则 $1/na_n \geqslant 1/n\,x_n$，故

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/na_n)}{\ln(\ln n)} \geqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/nx_n)}{\ln(\ln n)}.$$

以下如能证得 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1/nx_n)}{\ln(\ln n)}$ 存在，且其极限为 B，则有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln(1/na_n)}{\ln(\ln n)} \geqslant B.$$

再由 $B < A$ 的任意性，便导出

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln(1/na_n)}{\ln(\ln n)}\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty}\ln n[n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})-1].$$

因$\{\ln(\ln n)\}$是单增数列，故由 Stolz 定理，只要证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1/(n+1)x_{n+1})-\ln(1/nx_n)}{\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln n)}=B$$

即可．通过简单的计算可知

$$\frac{\ln(1/(n+1)x_{n+1})-\ln(1/nx_n)}{\ln(\ln(n+1))-\ln(\ln n)}$$

$$=\frac{-\ln((n+1)/n)-\ln(1-1/n-B/n\ln n)}{\ln(\ln(n+1)/\ln n)},$$

记上式右端为 A_n．由于 $\ln(n+1)/\ln n\to 1\ (n\to\infty)$，故

$$\ln(\frac{\ln(n+1)}{\ln n})=\ln(1+\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1)$$

$$=\left[\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1\right]\left[\ln(1+\frac{\ln(n+1)}{\ln n})\right]^{\frac{1}{\frac{\ln(n+1)}{\ln n}-1}}$$

$$\sim\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln n}=\frac{\ln(1+1/n)}{\ln n}\sim\frac{1}{n\ln n}\ (n\to\infty).$$

又

$$\ln(\frac{n+1}{n})+\ln(1-\frac{1}{n}-\frac{B}{n\ln n})$$

$$=\ln(\frac{n+1}{n}-\frac{n+1}{n^2}-\frac{(n+1)B}{n^2\ln n})$$

$$=\ln(1+\frac{1}{n}-\frac{n+1}{n^2}-\frac{(n+1)B}{n^2\ln n})$$

$$\sim\frac{1}{n}-\frac{n+1}{n^2}-\frac{(n+1)B}{n^2\ln n}\ (n\to\infty).$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}[-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{n^2}+\frac{(n+1)B}{n^2\ln n}]n\ln n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n\ln n+(n+1)\ln n+(n+1)B}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+(n+1)B}{n}=B.$$

定理得证.

现给出一个反例,以说明定理 9 之逆不真.

例 2 设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n3^{(-1)^n+\ln(\ln n)}}$,由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[(-1)^n+\ln(\ln n)]\ln 3}{\ln(\ln n)}=\ln 3>1,$$

故由拟对数判别法知正项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$ 收敛. 但因

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\dfrac{n}{n+1}3^{-2+\ln(\frac{\ln n}{\ln(n+1)})}, & n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{n}{n+1}3^{2+\ln(\frac{\ln n}{\ln(n+1)})}, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ln n[n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})-1]=+\infty,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ln n[n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})-1]=-\infty.$$

因此,仅用 Gauss 判别法不能确定此级数的敛散性.

注 4 这一小节的材料选自文献[2]和[150].

4.2.3 正项级数的两个等价判别法

可以证明,下面两个判别法是等价的.

I. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n<\frac{1}{e}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n>\frac{1}{e}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

II. (Raabe). 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数,则 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)<1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

定理 10 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数,则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n<\frac{1}{e}$ 的充要条

件是$\underline{\lim}_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>1$；$\underline{\lim}_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n>\frac{1}{e}$ 的充要条件是$\overline{\lim}_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)<1$.

证 只证第一部分，第二部分类似.

必要性. 取α使$\overline{\lim}_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n<\alpha<\frac{1}{e}$，则存在自然数$N$，当$n>N$时有

$$(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n<\alpha,$$

所以当$n>N$时有$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>n((\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{n}}-1)$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} n((\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{n}}-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

$$=\ln\frac{1}{\alpha}>\ln e=1,$$

所以

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)\geqslant\underline{\lim}_{n\to\infty} n((\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$=\lim_{n\to\infty} n((\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{n}}-1)>1.$$

充分性. 取α使$\underline{\lim}_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>\alpha>1$，则存在自然数$N$，当$n>N$时有

$$n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>\alpha,$$

所以当$n>N$时有$(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n<\frac{1}{(1+\alpha/n)^n}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\alpha/n)^n}=\frac{1}{e^\alpha}<\frac{1}{e},$$

所以

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}(\frac{a_{n+1}}{a_n})^n\leqslant\overline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\alpha/n)^n}<\frac{1}{e}.$$

证毕.

由定理 10 可知,判别法 I 与 II 彼此等价.

注 5 容易证明,下述两种判别法都与 Raabe 判别法等价:

I′. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n = r ,$$

则当 $e<r<+\infty$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;当 $0 \leqslant r < e$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

II′. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty} e\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = q ,$$

则当 $q<1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;当 $q>1$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

注 6 这一小节的材料选自文献[62].

4.2.4 Dirichlet 判别法和 Abel 判别法

Dirichlet 判别法和 Abel 判别法在无穷级数中有着广泛的应用.这里,我们将证明,Dirichlet 判别法和 Abel 判别法的条件不仅是充分的,而且也是必要的.

定理 11 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是存在分解 $u_n = a_n b_n$,使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和有界,当 $n \to \infty$ 时,b_n 单调趋于零.

证 充分性就是周知的数项级数的 Dirichlet 判别法,只证必要性.

因 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,故对于 $\frac{1}{1^3}$,存在自然数 n_1,当 $k > n_1$ 时有

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} u_n\right| < \frac{1}{1^3}.$$

一般地,对于 $\frac{1}{t^3}$,存在自然数 $n_t > n_{t-1}$,当 $k > n_t$ 时有

$$|\sum_{n=k}^{\infty}u_n|<\frac{1}{i^3},\quad i=2,3,\cdots$$

这样，就得到一个自然数列：$n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$令

$$b_n=\begin{cases}1,\ 1\leqslant n\leqslant n_1,\\ \dfrac{1}{i},\ n_i<n\leqslant n_{i+1},\ i=1,2,\cdots,\end{cases}$$

$$a_n=u_n/b_n,\ n=1,2,\cdots.$$

显然，$u_n=a_nb_n$，且当 $n\to\infty$ 时 b_n 单调趋于零．余下只要证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a$ 的部分和有界即可．

对任意自然数 n，若 $n\leqslant n_1$，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{b_i}=\sum_{i=1}^{n}u_i,$$

故

$$|\sum_{i=1}^{n}a_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|u_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n_1}|u_i|=L\ (\text{常数}).$$

若 $n>n_1$，则有自然数 k，使 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$，此时

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n_1}u_i+\sum_{i=n_1+1}^{n_2}u_i+\sum_{i=n_2+1}^{n_3}2u_i$$
$$+\sum_{i=n_3+1}^{n_4}3u_i+\cdots+\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}(k-1)u_i+\sum_{i=n_k+1}^{n}ku_i,$$

从而

$$|\sum_{i=1}^{n}a_i|\leqslant|\sum_{i=1}^{n_1}u_i|+|\sum_{i=n_1+1}^{n_2}u_i|+2|\sum_{i=n_2+1}^{n_3}u_i|$$
$$+3|\sum_{i=n_3+1}^{n_4}u_i|+\cdots+(k-1)|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}u_i|+k|\sum_{i=n_k+1}^{n}u_i|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n_1}|u_i|+(|\sum_{i=n_1+1}^{\infty}u_i|+|\sum_{i=n_2+1}^{\infty}u_i|)$$
$$+2(|\sum_{i=n_2+1}^{\infty}u_i|+|\sum_{i=n_3+1}^{\infty}u_i|)+\cdots$$

$$+(k-1)\left(\left|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{\infty}u_i\right|+\left|\sum_{i=n_k+1}^{\infty}u_i\right|\right)$$

$$+k\left(\left|\sum_{i=n_k+1}^{\infty}u_i\right|+\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i\right|\right)$$

$$<L+\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}\right)+2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$$

$$+(k-1)\left(\frac{1}{(k-1)^3}+\frac{1}{k^3}\right)+k\left(\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^3}\right)$$

$$<L+2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right)$$

$$<L+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=M\quad(\text{常数}).$$

总之，对任意自然数 n，都有 $\left|\sum_{i=1}^{n}a_i\right|<M$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和有界.

注 7 由数列和级数的关系，容易给出关于数列收敛的一个充要条件：数列 $\{u_n\}$ 收敛的充要条件是存在分解 $u_n-u_{n-1}=a_nb_n$，其中数列 $\{a_n\}$ 的部分和 $\sum_{i=1}^{n}a_i$ 有界，而数列 $\{b_n\}$ 单调收敛于零.

定理 12 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是可以作分解 $u_n=a_nb_n$，使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，而数列 $\{b_n\}$ 单调有界.

证 充分性即为数项级数的 Abel 判别法. 现证必要性. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则由 Dirichlet 判别法的必要条件(定理 11) 知，存在分解 $u_n=\alpha_n\beta_n$，使 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 的部分和有界，当 $n\to\infty$ 时 $\{\beta_n\}$ 单调趋于零. 显然，$\{\beta_n^{1/3}\}$ 也单调趋于零. 因而由 Dirichlet 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n^{1/3}$ 收敛. 同理可得，$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\beta_n^{1/3}\,\beta_n^{1/3}$ 收敛. 令 $a_n=\alpha_n\beta_n^{2/3}$，$b_n=\beta_n^{1/3}$，显然 $\{b_n\}$ 单调有界.

从定理 12 的证明可得下面定理：

定理 13 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是存在分解 $u_n=a_nb_n$，使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $n\to\infty$ 时 $\{b_n\}$ 单调趋于零.

注 8 这一小节的材料选自文献[77]、[69]和[56].

4.2.5 级数绝对收敛的导数判别法

这里，我们介绍一种新的判别法，它可以判定某些无穷级数是否绝对收敛. 由于这个判别法是建立在求导的基础上的，故称之为导数判别法.

定理 14(导数判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是数项级数，$f(x)$ 是定义在 0 的某个邻域上的函数，使得 $f(\frac{1}{n})=a_n$(或当自然数 n 充分大时成立)，且 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处存在. 那么，如果 $f(0)=f'(0)=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是绝对收敛的；反之是发散的.

证 不妨设对一切 n，有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$. 由定理的条件知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且在 $x=0$ 的某个邻域内是可导的.

必要性. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0.$$

假如 $f'(0)=a\neq0$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a,$$

于是有 $\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{\frac{1}{n}}=|a|\neq0$. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，故由正项级数的比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散，与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛发生矛盾，从而 $f'(0)=0$.

充分性．令 $0<u<1$，则有

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^{1+u}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{(1+u)x^u}$$

$$=\frac{1}{1+u}\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}\cdot x^{1-u}$$

$$=\frac{f''(0)}{1+u}\lim_{x\to 0^+}x^{1-u}=0.$$

上式表明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{(\frac{1}{n})^{1+u}}=0$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+u}}$ 收敛，故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛．

例 3 下列级数是否绝对收敛．

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n}))$，　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$．

解 (1) 令 $f(x)=x-\ln(1+x)$，$f''(x)$ 存在，且 $f(0)=f'(0)=0$，故由导数判别法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n}))$ 是绝对收敛的．

(2) 令 $f(x)=\ln(1+x)$，$f''(x)$ 存在，但 $f'(0)=1$，$f(0)=0$，故由导数判别法，知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 是发散的．

4.2.6 级数的 Cauchy 乘积

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个数项级数，令

$$c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1,$$

我们称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的 Cauchy 乘积．

关于两个级数的 Cauchy 乘积，有下述重要定理．

定理 15(Cauchy 定理)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都绝对收敛，其和分别为 A 与 B，则其 Cauchy 乘积 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也绝对收敛，且其和为 AB.

定理 15 的证明可参看[99].

定理 16 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，且其中至少有一个绝对收敛，其和分别为 A 与 B，则其 Cauchy 乘积 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 必收敛，且和为 AB.

证 不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=A'$，令 $C_n=\sum_{k=1}^{n}c_k$，$A_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$，$B_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$，因 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，故存在常数 B'，使 $|B_n|\leqslant B'$ $(n=1,2,\cdots)$. 显然，

$$C_n=a_1B_n+a_2B_{n-1}+\cdots+a_nB_1,$$

从而 $A_nB-C_n=a_1(B-B_n)+a_2(B-B_{n-1})+\cdots+a_n(B-B_1)$，

$$|A_nB-C_n|\leqslant\sum_{v=1}^{[\frac{n}{2}]-1}|a_v||B-B_{n-v}|+\sum_{v=[\frac{n}{2}]}^{n}|a_v||B-B_{n-v}|$$

$$\leqslant A'\max_{[\frac{n}{2}]\leqslant k\leqslant n}|B-B_k|+2B'\sum_{v=[\frac{n}{2}]}^{n}|a_v|.$$

可见 $A_nB-C_n\to 0$ $(n\to\infty)$，即 $C_n\to AB$ $(n\to\infty)$. 证毕.

应当注意，两个条件收敛的级数，其 Cauchy 乘积未必收敛. 例如，设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 为两个相等的级数：

$$a_n=b_n=(-1)^n/\sqrt{n+1},\ n=0,1,2,\cdots$$

于是，据交错级数的 Leibniz 判别法，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ 均收敛. 但是

$$C_n=(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n-k+1)(k+1)}},$$

而

$$(n-k+1)(k+1)=(n/2+1)^2-(n/2-k)^2$$
$$\leqslant(n/2+1)^2,$$

所以

$$|C_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} \geqslant 1 .$$

因此，Cauchy 乘积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 发散.

但也存在两个条件收敛级数，其 Cauchy 乘积绝对收敛.

如所周知，当 $|t|<1$ 时，对任何实数 m，函数 $(1+t)^m$ 的 Taylor 级数是绝对收敛的. 若 $-1<m<0$，则当 $t=1$ 时相应的级数条件收敛，而当 $t=-1$ 时发散. 由此可知，级数

$$f(x) = (1+x)(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

和

$$g(x) = (1-x+x^2)(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

当 $|x|<1$ 时绝对收敛，而当 $x=1$ 时条件收敛，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 都是条件收敛的.

因对任意 x，恒有 $f(x)g(x)=1$，故 $c_0=1, c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0=0$ $(n=1,2,\cdots)$. 因此，Cauchy 乘积 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

也存在两个发散级数，其 Cauchy 乘积绝对收敛. 例如，设

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) ,$$

因这两个级数的通项都不趋于零，故它们都是发散的. 而

$$\begin{aligned} c_n &= a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) \\ &\quad - \cdots - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2 + \frac{1}{2^2}\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2 + \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2^2} - \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= (\frac{3}{2})^{n-1}\frac{3}{2^{n+1}} = (\frac{3}{4})^n,$$

故 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 绝对收敛.

注 9 这一小节的材料主要取自文献[156].

4.2.7 无穷级数与广义积分收敛的某些必要条件

下面两个定理是熟知的:

定理 17 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,且 $a_n \geqslant a_{n+1}(n=1,2,\cdots)$,则 $\lim_{n\to\infty} n\ a_n = 0$.

定理 18 若积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,且函数 f 在区间$(1,+\infty)$内单减,则 $\lim_{x\to+\infty} f(x)x = 0$.

Norris[155]介绍了类似的有关广义积分与无穷级数收敛的必要条件. 为方便起见,我们规定 $a>0$,且 a 与自然数 m 取得足够大,使得有关对数函数的值都是正的. 此外,令

$$\ln^{(k)}x = \ln\ln\cdots\ln x \text{ (共取 } k \text{ 次对数)},$$

而 $\ln^{(0)}x = 1$.

定理 19 若积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,函数 $f(x)x\ln x\ln\ln x\cdots \ln^{(k-1)}x$ 在区间$(a,+\infty)$内单减,则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)x\ln x\ln\ln x\cdots\ln^{(k-1)}x\ln^{(k)}x = 0.$$

证 当 $k=1$ 时,令 $\ln x = y$,则积分 $\int_{\ln a}^{+\infty} f(e^y)e^y dy$ 收敛. 据假设,$f(x)x$ 在区间$(a,+\infty)$内单减,故 $f(e^y)e^y$ 在区间$(\ln a,+\infty)$内也单减. 于是由定理 18,即得

$$\lim_{y\to+\infty} f(e^y)e^y y = 0,$$

从而 $\lim_{x\to+\infty} f(x)x\ln x = 0$.

对于一般情形,可令 $\ln^{(k)}x = y$,仿照上述证明,便知定理 19 的结论成立.

定理 20 若级数 $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ 收敛，且数列 $\{a_n n \ln n \cdots \ln^{(k-1)} n\}$ 单减，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n n \ln n \cdots \ln^{(k-1)} n \ln^{(k)} n = 0 .$$

证 对 $n \leqslant x < n+1$ $(n=m, m+1, \cdots)$，令

$$f(x) = \frac{a_n n \ln n \cdots \ln^{(k-1)} n}{x \ln x \cdots \ln^{(k-1)} x} .$$

因 $\{a_n n \ln n \cdots \ln^{(k-1)} n\}$ 单减，故 $f(x) x \ln x \cdots \ln^{(k-1)} x$ 在区间 $(m, +\infty)$ 内也单减．由定理 20 的条件易见 $a_n \geqslant 0$，因而当 $n \leqslant x < n+1$ 时，$0 \leqslant f(x) \leqslant a_n$．于是

$$\int_m^{+\infty} f(x)dx \leqslant \sum_{n=m}^{\infty} a_n ,$$

故积分 $\int_m^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，再由定理 19 即得

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) x \ln x \ln\ln x \cdots \ln^{(k-1)} x \ln^{(k)} x = 0 ,$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n n \ln n \cdots \ln^{(k-1)} n \ln^{(k)} n = 0$.

4.2.8 无穷级数的积分判别法的推广

在无穷级数理论中，有下述重要判别法：

定理 21 设函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单减且取正值，又 $\varphi(x) \to 0 (x \to +\infty)$，$F(x) = a^x \varphi(a^x)$ $(a>1)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(n)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} F(n)$ 同时收敛或同时发散．

特别地，取 $a=2$，$\varphi(n) = a_n$，便得如下推论：

推论 1 若 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant \cdots \geqslant 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散．

定理 22（积分判别法） 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单减，且 $f(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$，则积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同

时收敛或同时发散.

上述定理的证明可参看[99].

定理 21 可作如下推广:

定理 23 若函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单减,且 $\varphi(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$,又 $\{g_n\}$ 是单增且趋于 $+\infty$ 的正数序列,则

(i) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1}-g_n)\varphi(g_n)$ 收敛时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 也收敛.

(ii) 当级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1}-g_n)\varphi(g_{n+1})$ 发散时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$ 也发散.

(iii) 若数列 $\{g_{n+1}-g_n\}$ 有界或存在常数 λ,使 $g_{k+1}-g_k\leqslant\lambda(g_k-g_{k-1})$ $(k=2,3,\cdots)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1}-g_n)\varphi(g_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(g_{n+1}-g_n)\varphi(g_{n+1})$ 同时收敛或同时发散.

证 当 $g_{k+1}>x>g_k$ 时,有 $\varphi(g_k)>\varphi(x)>\varphi(g_{k+1})$,故

$$(g_{k+1}-g_k)\varphi(g_k)\geqslant\int_{g_k}^{g_{k+1}}\varphi(x)dx\geqslant(g_{k+1}-g_k)\varphi(g_{k+1}). \tag{3}$$

对 $k=1,2,\cdots,n$ 求和,得到

$$\sum_{k=1}^{n}(g_{k+1}-g_k)\varphi(g_k)\geqslant\int_{g_1}^{g_{n+1}}\varphi(x)dx\geqslant\sum_{k=1}^{n}(g_{k+1}-g_k)\varphi(g_{k+1}). \tag{4}$$

由不等式(4)并应用积分判别法,便得定理 23 的结论(i)与(ii).

为证(iii),设 $g_{n+1}-g_n<\mu$ $(n=1,2,\cdots)$,其中 μ 是正常数,则

$$\begin{aligned}0&<\sum_{k=2}^{n}(g_k-g_{k-1})\varphi(g_{k-1})-\sum_{k=2}^{n}(g_k-g_{k-1})\varphi(g_k)\\&\leqslant\mu\sum_{k=2}^{n}\{\varphi(g_{k-1})-\varphi(g_k)\}\\&=\mu\{\varphi(g_1)-\varphi(g_n)\}<\mu\varphi(g_1).\end{aligned}$$

于是,级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(g_n-g_{n-1})\varphi(g_n)$ 与 $\sum_{n=2}^{\infty}(g_n-g_{n-1})\varphi(g_{n-1})$ 同时收敛

或同时发散．由积分判别法便得(iii)的第一部分．

注意到当 $g_{k+1}-g_k \leqslant \lambda(g_k-g_{k-1})$ 时，由(3)可得

$$\lambda(g_k-g_{k-1})\varphi(g_k) \geqslant \int_{g_k}^{g_{k+1}} \varphi(x)dx \geqslant (g_{k+1}-g_k)\varphi(g_{k+1}) , \tag{5}$$

$$(g_{k+1}-g_k)\varphi(g_k) \geqslant \int_{g_k}^{g_{k+1}} \varphi(x)dx \geqslant \frac{1}{\lambda}(g_{k+2}-g_{k+1})\varphi(g_{k+1}) . \tag{6}$$

在(5)与(6)中分别对 $k=2,3,\cdots,n$ 与 $k=1,2,\cdots,n$ 求和，得到

$$\lambda\sum_{k=2}^{n}(g_k-g_{k-1})\varphi(g_k) \geqslant \int_{g_2}^{g_{n+1}} \varphi(x)dx \geqslant \sum_{k=3}^{n}(g_k-g_{k-1})\varphi(g_k) , \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(g_{k+1}-g_k)\varphi(g_k) \geqslant \int_{g_1}^{g_{n+1}} \varphi(x)dx \geqslant \frac{1}{\lambda}\sum_{k=2}^{n+1}(g_{k+1}-g_k)\varphi(g_k) . \tag{8}$$

由(7)，(8)并应用积分判别法，便得(iii)的第二部分．

注 10 若取 $g(n)=a^n(a>1)$，则不等式(3)可写成

$$(a-1)a^k\varphi(a^k) \geqslant \int_{a^k}^{a^{k+1}} \varphi(x)dx \geqslant \frac{a-1}{a}a^{k+1}\varphi(a^{k+1}) . \tag{9}$$

在(9)中对 $k=1,2,\cdots$ 求和，便得定理 21.

定理 22 可作如下推广：

定理 24 设 $\varphi(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上单减，且 $\varphi(x)\to 0$ $(x\to+\infty)$，$F(x)=a^x\varphi(a^x)$ $(a>1)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}F(n)$ 与积分 $\int_1^{+\infty}F(x)dx$ 同时收敛或同时发散．

证 在不等式(9)中令 $x=a^t$，便得

$$(a-1)a^k\varphi(a^k) \geqslant \int_k^{k+1} a^t\varphi(a^t)\ln a dt \geqslant \frac{a-1}{a}a^{k+1}\varphi(a^{k+1}) .$$

在上式中对 $k=1,2,\cdots$ 求和，就得到定理 24.

定理 25 设(i) $\lambda_i<\lambda_{i+1}$ 且 $\lim\limits_{i\to\infty}\lambda_i=+\infty$，(ii) 存在常数 $M>0$，使 $\lambda_{i+1}-\lambda_i \geqslant M$ $(i=1,2,\cdots)$，(iii) 函数 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上非负

且单减，(iv) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则级数 $\sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i)$ 收敛.

证 设 n 为一固定的自然数，使 $\lambda_n \geqslant a$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} f(\lambda_i)$ 收敛的充要条件是 $\sum_{i=n}^{\infty} f(\lambda_i)$ 收敛.

由定理 25 的假设知，当 $\lambda_i \leqslant x \leqslant \lambda_{i+1}(i \geqslant n)$ 时有 $f(\lambda_{i+1}) \leqslant f(x) \leqslant f(\lambda_i)$，两边积分得

$$f(\lambda_{i+1})(\lambda_{i+1} - \lambda_i) \leqslant \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} f(x)dx \leqslant f(\lambda_i)(\lambda_{i+1} - \lambda_i).$$

对每个自然数 $N > n$，由上式得

$$\sum_{i=n+1}^{N+1} f(\lambda_i)(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \leqslant \int_{\lambda_n}^{\lambda_{N+1}} f(x)dx \leqslant \sum_{i=n}^{N} f(\lambda_i)(\lambda_{i+1} - \lambda_i). \tag{10}$$

因 $\lambda_{i+1} - \lambda_i \geqslant M$，故由(10)及函数 f 的非负性得

$$\sum_{i=n}^{N+1} f(\lambda_i) \leqslant f(\lambda_n) + \frac{1}{M}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{N+1}} f(x)dx.$$

因此，当 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛时，$\sum_{i=n}^{\infty} f(\lambda_i)$ 也收敛. 证毕.

特别，当 $\lambda_i = i$ 时，由(10)知，积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与级数 $\sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ 同时收敛或同时发散，这就是通常的积分判别法.

注 11 这一小节的材料选自文献[164]和[105].

注 12 Ward[180]介绍了下述积分判别法：

定理 26 设函数 f 在区间 $[1, +\infty)$ 上可导，且 f' 在任何有限区间 $[1, b]$ 上可积. 若积分 $\int_1^{+\infty} f'(x)dx$ 绝对收敛，则积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同时收敛或同时发散.

4.2.9 评注

正项级数敛散性判别问题是一个基本而又重要的课题，仅有熟知的 D'Alembert 判别法和 Cauchy 判别法是远远不够的．本节的定理 1 基于通项的单调性，并借助于 D'Alembert 判别法而得到了一种比较广泛且便于应用的判别法．定理 3 和定理 4 分别推广了 Raabe 判别法和 Gauss 判别法，而定理 24 和定理 25 则推广了熟知的积分判别法．有关探讨正项级数敛散性判别法的文章很多，例如，王继武、康泰[9]，李佛奇[36]都介绍了正项级数敛散性的其它判别法，马尔迈[4]进一步改进了李佛奇介绍的方法．

对给定的正项级数，在某些判别法下可确定其敛散性，而用另一些判别法却不能断定，这就是所谓判别法的强弱问题．判别法的强弱问题与建立它时所依据的标准级数的收敛速度有关．然而，以同一标准级数所建立的不同的判别法之间也存在适用范围不同的问题．本节的定理 8 和定理 9 进一步阐明了这个问题．

在级数理论中，Dirichet 判别法和 Abel 判别法是两个重要的判别法，定理 11 和定理 12 用构造性的方法证明了这两个判别法的条件不仅是充分的，而且也是必要的．这就给出了数学分析中的两个分解定理，它们对我们研究收敛性和一致收敛性是很有益的．

本节介绍的级数绝对收敛的导数判别法，这对较简单的级数确是一个较好的方法．周英[61]在此基础上进一步介绍了更为广泛的导数判别法，而本节介绍的导数判别法仅是周英介绍的一种方法的特例．

§4.3 函数项级数

4.3.1 Dirichlet 判别法与 Abel 判别法

我们将进一步指出，函数项级数的 Dirichlet 判别法和 Abel

判别法的条件不仅是充分的，而且也是必要的．

定理 1　函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛的充要条件是存在分解$u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，使$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和在$[a,b]$上一致有界，而$b_n(x)$对每一个$x$单调，且当$n\to\infty$时它在$[a,b]$上一致趋于零．

证　充分性就是熟知的 Dirichlet 判别法．

必要性．因$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，故对于$\frac{1}{1^3}$，存在与$x$无关的自然数$n_1$，使得当$k>n_1$时，对所有$x\in[a,b]$都有

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}u_n(x)\right|<\frac{1}{1^3}.$$

一般地，对于$\frac{1}{i^3}$，存在与x无关的自然数$n_i>n_{i-1}$，使得当$k>n_i$时，对所有$x\in[a,b]$都有

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}u_n(x)\right|<\frac{1}{i^3},\ i=2,3,\cdots$$

于是得到了一个自然数列$n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$令集合

$$E=\left\{x\left|\sum_{i=1}^{n_1}|u_i(x)|<1,\ x\in[a,b]\right.\right\},$$

并作函数　$N(x)=\begin{cases}1,\ x\in E,\\ \sum\limits_{i=1}^{n_1}|u_i(x)|,\ x\in[a,b]\backslash E.\end{cases}$

再令　$b_n(x)=\begin{cases}N(x),\ 1\leqslant n\leqslant n_1,\\ \frac{1}{i},\ n_i<n\leqslant n_{i+1},\ i=1,2,\cdots,\end{cases}$

$$a_n(x)=u_n(x)/b_n(x),\ n=1,2,\cdots$$

显然$u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，且$b_n(x)$对每一个$x\in[a,b]$单调，当$n\to\infty$时它在$[a,b]$上一致趋于零．然后，和§4.2 中定理 11 类似地可以证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)$的部分和在$[a,b]$上一致有界．证毕．

定理 1 可以平行地推广到广义积分和含参变量积分的情形，其证明方法实质上相同．限于篇幅，下面仅列出定理．

定理 2 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件是存在分解 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$，使 $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，当 $x\to+\infty$ 时它趋于零，而对任意常数 $A>a$，积分 $\int_a^A \psi(x)dx$ 存在且有界．

定理 3 含参变量积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 为一致收敛的充要条件是存在分解

$$f(x,y)=u(x,y)v(x,y),$$

使 $u(x,y)$ 对 x 在 $[a,+\infty)$ 上单调，当 $x\to+\infty$ 时关于 y 一致趋于零，而对任意常数 $A>a$，积分 $\int_a^A v(x,y)dx$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致有界．

定理 4 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛的充要条件是存在分解 $u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，使 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，又对每一固定的 x，数列 $\{b_n(x)\}$ 单调，而对任意的 x 和 n，有 $|b_n(x)|\leqslant L$（不依赖 x 和 n 的定数）．

证 充分性就是熟知的 Abel 判别法．

必要性．若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，则由定理 1 知，存在分解 $u_n(x)=\alpha_n(x)\beta_n(x)$，使 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)$ 的部分和在 $[a,b]$ 上一致有界，又对每一 x，数列 $\{\beta_n(x)\}$ 单调，并且函数列 $\{\beta_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零．于是对每一 x，$[\beta_n(x)]^{\frac{1}{3}}$ 单调，且函数列 $\{[\beta_n(x)]^{\frac{1}{3}}\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于零．因此，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)[b_n(x)]^{\frac{1}{3}}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛．同理，$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x)[\beta_n(x)]^{\frac{1}{3}}[\beta_n(x)]^{\frac{1}{3}}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛．令 $a_n(x)=\alpha_n(x)[\beta_n(x)]^{\frac{2}{3}}$，$b_n(x)=[\beta_n(x)]^{\frac{1}{3}}$，则

$\{b_n(x)\}$在$[a,b]$上一致有界，即$\{a_n(x)\}$，$\{b_n(x)\}$满足定理 4 中的要求．证毕．

定理 4 可以平行地推广到广义积分和含参变量积分的情形，下面仅列出定理．

定理 5 广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛的充要条件是存在分解$f(x)=\varphi(x)\psi(x)$，使$\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$收敛，当$x\to+\infty$时，$\psi(x)$单调趋于零．

定理 6 含参变量积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$关于$y\in[c,d]$为一致收敛的充要条件是存在分解

$$f(x,y)=u(x,y)v(x,y),$$

使$u(x,y)$对x单调且关于y为一致有界，即存在正数L，对所讨论范围内的一切x,y，有$|u(x,y)|\leqslant L$，且$\int_a^{+\infty} v(x,y)dx$关于$y\in[c,d]$为一致收敛．

注 1 这一小节的材料来源于文献[77]、[69]和[56].

4.3.2 关于函数项级数的 Fubini 定理

在函数项级数理论中，有下述著名的 Fubini 定理．

定理 7 设$f_n(n=1,2,\cdots)$是定义在区间$[a,b]$上的单增函数，而且级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$在$[a,b]$上处处收敛于某个函数$f(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处可微，且在$[a,b]$上几乎处处有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x).$$

定理 7 的证明可参看[99].

由于有界变差函数可表为两个单增函数之差，因而我们自然要问：可否把 Fubini 定理推广到有界变差的函数项级数？下面的例子将指出，Fubini 定理不得推广到有界变差函数项(即使一致收敛)级数．

例 1 在区间[0,1]上定义函数列如下：

$$(x)=\begin{cases}x-[x],[x]\leqslant x<[x]+1/2,\\0,x=[x]+1/2,\\x-[x]-1,[x]+1/2<x<[x]+1,\\0,x=1,\end{cases}$$

$$(2x)=\begin{cases}2x-[2x],[2x]\leqslant 2x<[2x]+1/2,\\0,2x=[2x]+1/2,\\2x-[2x]-1,[2x]+1/2<2x<[2x]+1,\\0,x=1.\end{cases}$$

一般，

$$(nx)=\begin{cases}nx-[nx],[nx]\leqslant nx<[nx]+1/2,\\0,nx=[nx]+1/2,\\nx-[nx]-1,[nx]+1/2<nx<[nx]+1,\\0,x=1,\end{cases}$$

$n=1,2,\cdots,[x]$ 代表括号函数.

函数(x)在[0,1]上只有不连续点 $x=1/2$;$(2x)$在[0,1]上只有不连续点 1/4,3/4;一般地,(nx)在[0,1]上只有不连续点 $x=m/2n$,这里 $m=1,3,\cdots,2n-1$. 易见,对每一 n,(nx)都是[0,1]上的有界变差函数,而且 $|(x)|\leqslant 1/2$,$|(2x)|\leqslant 1/2$,一般,$|(nx)|\leqslant 1/2$. 因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$ 在[0,1]上一致收敛于某个函数 $f(x)$.

兹证 f 在[0,1]上并不几乎处处可微. 为此,取自然数 N,并任取 $x_0\in[0,1/2N)$,$x_0<x\in[0,1/2N)$. 于是

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)-(nx_0)}{x-x_0}.$$

设 $\frac{1}{2(m+1)}<|x-x_0|=\delta<\frac{1}{2m}$ $(m>N)$，当 $1\leqslant n\leqslant m$ 时，$n|x-x_0|<\frac{n}{2m}\leqslant\frac{1}{2}$，所以

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)-(nx_0)}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}.$$

又

$$\left|\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)-(nx_0)}{x-x_0}\right|\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$<2(m+1)\frac{1}{m}<4,$$

因此

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=\left|\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)-(nx_0)}{x-x_0}\right|$$

$$>\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-4.$$

这说明有穷的 $f'(x_0)$ 不存在. 由于 $x_0\in[0,1/2N)$ 是任取的,因而 f 在 $[0,1/2N)$ 上处处不可导,从而不能在 $[0,1]$ 上几乎处处逐项求导数.

4.3.3 函数项级数的亚一致收敛

在研究函数项级数的和函数的分析性质时有如下熟知的定理.

定理 8 设函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于和函数 $f(x)$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

这里就级数的和函数 $f(x)$ 的连续性而言,一致收敛是其充分条件,并不是必要条件. Arzela 与 Borel 提出了亚一致收敛概念,得到了函数项级数亚一致收敛性与其和函数连续性之间的等价性.

定义 1 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的函数项级数,它在 $[a,b]$ 上处处收敛于 $f(x)$. 若对任意 $\varepsilon>0$ 及任意自然数 N,恒有自然数 $N'>N$,使得对任意 $x\in[a,b]$,自然数序列中的一段 $[N,N']$ 中都含有使不等式

$$|R_{n_x}(x)|<\varepsilon$$

成立的足码 n_x 存在,其中 $R_{n_x}(x)$ 是级数的余和.

定理 9(Arzela－Borel)　设函数 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在区间 $[a,b]$上连续．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上处处收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上连续的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上亚一致收敛于 $f(x)$.

这里，我们介绍函数项级数亚一致收敛的几个判别法，并证明了函数列的亚一致收敛性与其子列的亚一致收敛性等价．

定理 10　函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间$[a,b]$上亚一致收敛的充要条件是：对任意 $\varepsilon>0$ 及任意自然数 N，存在自然数 $N'>N$，使得$[a,b]$中的每个 x 都有 $n_x\in[N,N']$ 及自然数列的子列$\{n_{k_x}\}$，对一切 $n_{k_x}>n_x$，适合

$$|u_{n_x+1}(x)+u_{n_x+2}(x)+\cdots+u_{n_{k_x}}(x)|<\varepsilon. \tag{1}$$

证　充分性．在(1)中令 $k_x\to\infty$即得．

必要性．因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[a,b]$ 上亚一致收敛，故对任意 $\varepsilon>0$ 及任意自然数 N，存在 $N'>N$，使对每一 $x\in[a,b]$，有 $n_x\in[N,N']$，适合

$$|R_{n_x}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对 $N'+1$，存在 $N''>N'+1$，使对任意 $x\in[a,b]$，有 $n_{1_x}\in[N'+1,N'']$，适合

$$|R_{n_{1_x}}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对 $N''+1$，存在 $N'''>N''+1$，使得对任意 $x\in[a,b]$，有 $n_{2_x}\in[N''+1,N''']$，适合

$$|R_{n_{2_x}}(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

如此继续下去，可得自然数列的子列$\{n_{k_x}\}$，适合

$$|R_{n_{k_x}}(x)|<\frac{\varepsilon}{2},k=1,2,\cdots,$$

于是便有

$$|u_{n_x+1}(x)+u_{n_x+2}(x)+\cdots+u_{n_{k_x}}(x)|$$
$$=|R_{n_{k_x}}(x)-R_{n_x}(x)|\leqslant|R_{n_{k_x}}(x)|+|R_{n_x}(x)|<\varepsilon.$$

证毕.

记 $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$, $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上亚一致收敛的充要条件是:对任意 $\varepsilon>0$ 及任意自然数 N, 存在自然数 $N'>N$, 使得对每个 $x\in[a,b]$, 存在 $n_x\in[N,N']$, 适合

$$|f(x)-f_{n_x}(x)|<\varepsilon.$$

此时,我们也称函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上亚一致收敛于 $f(x)$. 由定理 10 可得.

定理 11 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上亚一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是:对任意 $\varepsilon>0$ 及任意自然数 N, 存在自然数 $N'>N$, 使得对任意 $x\in[a,b]$, 存在 $n_k\in[N,N']$ 及自然数列的子列 $\{n_{k_x}\}$, 对于一切 $n_{k_x}>n_x$, 有

$$|f_{n_{k_x}}(x)-f_{n_x}(x)|<\varepsilon.$$

定理 12 函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上亚一致收敛于 $f(x)$ 的充要条件是 $\{f_n(x)\}$ 含有在 $[a,b]$ 上亚一致收敛于 $f(x)$ 的真子列.

证 必要性是显然的.

充分性. 设 $\{f_{n_k}(x)\}$ 是其在 $[a,b]$ 上亚一致收敛于 $f(x)$ 的真子列,则对任意 $\varepsilon>0$ 及任意自然数 N, 存在 $N'>N$, 使对每个 $x\in[a,b]$, 都有 $k_x\in[N,N']$, 满足

$$|f\,n_{k_x}(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

于是对任意 $\varepsilon>0$ 及任意 N, 存在 $n_{N'}>N$, 使对任意 $x\in[a,b]$, 都有 $n_{k_x}\in[N,n_{N'}]$, 适合

$$|f\,n_{k_x}(x)-f\,n_x(x)|<\varepsilon.$$

按定义, $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上亚一致收敛于 $f(x)$.

推论 1 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛且含有一致

收敛的子列，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上亚一致收敛.

定理 13 若在$[a,b]$上$|u_n(x)|\leqslant v_n(x)$对一切n成立，且级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$在$[a,b]$上亚一致收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上也亚一致收敛.

证明留给读者作为练习.

定理 14 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$在区间$[a,b]$上亚一致收敛，函数列$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$上逐点有界，即对每个$x\in[a,b]$，存在$M_x$，使得$|u_n(x)|\leqslant M_x(n=1,2,\cdots)$，又对每个$x\in[a,b]$，数列$\{u_n(x)\}$单调，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$在$[a,b]$上亚一致收敛.

证 因$|u_n(x)|\leqslant M_x(n=1,2,\cdots)$，而$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$在$[a,b]$上亚一致收敛，故对任意$\varepsilon>0$及任意$N$，存在$N'>N$，使对每个$x\in[a,b]$，存在$n_x\in[N,N']$及自然数列的子列$\{n_{k_x}\}$，对一切$n_{k_x}>n_x$，适合

$$|v_{n_x+1}(x)+v_{n_x+2}(x)+\cdots+v_{n_{k_x}}(x)|<\frac{\varepsilon}{4M_x}.$$

又由定理的条件，对每个$x\in[a,b]$及任意自然数n_x，数列$u_{n_x+p}(x)$ $(p=1,2,\cdots)$都单调，据 Abel 引理，对任意$n_{k_x}>n_x$，都有

$$|u_{n_x+1}(x)v_{n_x+1}(x)+u_{n_x+2}(x)v_{n_x+2}(x)+\cdots+u_{n_{k_x}}(x)v_{n_{k_x}}(x)|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4M_x}3M_x<\varepsilon.$$

再由定理 10，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$在$[a,b]$上亚一致收敛.

定理 15 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$的部分和序列$\{\sum_{k=1}^{n}v_k(x)\}$在$[a,b]$上逐点有界，函数列$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$上亚一致收敛于零，又对任意$x\in[a,b]$，数列$\{u_n(x)\}$单调，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$在$[a,b]$上

亚一致收敛.

证 对每个 $x \in [a,b]$,存在 $M_x > 0$,使

$$\left| \sum_{k=1}^{n} v_k(x) \right| \leqslant M_x,\ n = 1,2,\cdots$$

于是对任意自然数 n_x 和 n_{k_x},都有

$$\begin{aligned} &|v_{n_x+1}(x) + v_{n_x+2}(x) + \cdots + v_{n_{k_x}}(x)| \\ &= \left| \sum_{k=1}^{n_{k_x}} v_k(x) - \sum_{k=1}^{n_x} v_k(x) \right| \\ &\leqslant \left| \sum_{k=1}^{n_{k_x}} v_k(x) \right| + \left| \sum_{k=1}^{n_x} v_k(x) \right| \leqslant 2M_x. \end{aligned}$$

又对任意 $x \in [a,b]$及任意自然数 n_x,数列 $u_{n_x+p}(x)$ $(p=1,2,\cdots)$ 都单调,据 Abel 引理,对任意自然数$n_x, n_{k_x}(>n_x)$,都有

$$\begin{aligned} &|u_{n_x+1}(x)v_{n_x+1}(x) + u_{n_x+2}(x)v_{n_x+2}(x) + \cdots + u_{n_{k_x}}(x)v_{n_{k_x}}(x)| \\ &\leqslant 2M_x(|u_{n_x+1}(x)| + 2|u_{n_{k_x}}(x)|). \end{aligned} \tag{2}$$

又因$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$上亚一致收敛于零,故由定理 11,对任意 $\varepsilon > 0$ 及任意 N,存在 $N' > N$,使对任意 $x \in [a,b]$,存在 $n_x \in [N,N']$ 及自然数列的子列$\{n_{k_x}\}$,对一切 $n_{k_x} > n_x$,适合

$$|u_{n_{k_x}}(x) - u_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{18M_x}.$$

于是

$$|u_{n_x}(x)| < |u_{n_{k_x}}(x)| + \frac{\varepsilon}{18M_x}. \tag{3}$$

又因$\{u_n(x)\}$在$[a,b]$上逐点收敛于零,故当n_{k_x}充分大时,$|u_{n_{k_x}}(x)| < \frac{\varepsilon}{18M_x}$,因而由(3)得到

$$|u_{n_x}(x)| < \frac{\varepsilon}{9M_x}.$$

再由$\{u_n(x)\}$的单调性可知,不等式$|u_{n_x+1}(x)| \leqslant |u_{n_x}(x)|$与$|u_{n_x+1}(x)| \leqslant |u_{n_k}(x)|$必有一个成立. 选取$n_{k_x}$充分大时,可得

$$|u_{n_{k_x}}(x)| < |u_{n_x}(x)| + \frac{\varepsilon}{18M_x} < \frac{\varepsilon}{6M_x}.$$

于是由(2)知，对任意 $x\in[a,b]$，存在 $n_x\in[N,N']$及自然数的子列$\{n_{k_x}\}$，对一切 $n_{k_x}>n_x$，都有

$$|u_{n_x+1}(x)v_{n_x+1}(x)+u_{n_x+2}(x)v_{n_x+2}(x)+\cdots+u_{n_{k_x}}(x)v_{n_{k_x}}(x)|$$

$$\leqslant 2M_x\left(\frac{\varepsilon}{9M_x}+\frac{\varepsilon}{6M_x}\right)<\varepsilon .$$

再由定理 10，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)v_n(x)$在$[a,b]$上亚一致收敛．

注 2 由函数列的亚一致收敛不能推出其所有的子列都亚一致收敛．

例 2 对 $x\in(-\infty,+\infty)$，令

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}\ ,\ n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{x}{n}\ ,\ n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

则$\{f_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上亚一致收敛于零，而$\{f_{2n}(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上并不亚一致收敛于零．

注 3 这一小节的材料选自文献[53].

4.3.4 关于积分号下取极限

我们知道，若函数列$\{f_n(x)\}$在区间$[a,b]$上连续且一致收敛于函数 $f(x)$，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积，且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx .$$

一致收敛的条件太强．例如，令 $f_n(x)=x^n$，则$\{f_n(x)\}$在[0,1]上收敛于函数

$$f(x)=\begin{cases}0\ ,\ 0\leqslant x<1\ ,\\ 1\ ,\ x=1\ .\end{cases}$$

但它并不一致收敛，然而却有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n dx=\int_0^1\lim_{n\to\infty}x^n dx=0 .$$

为了较深入地研究积分号下取极限的问题，我们引入一致可

积的概念，并给出积分号下取极限的更广泛的定理．

用 T 表示区间$[a,b]$的一个分划：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，并令

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \qquad \lambda(T) = \max_{0\leqslant i\leqslant n-1} \Delta x_i;$$

$$m_i = \inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x), \quad M_i = \sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f(x);$$

$$m_{ik} = \inf_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f_k(x), \quad M_{ik} = \sup_{x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1}} f_k(x);$$

$$\omega_i = M_i - m_i, \qquad \omega_{ik} = M_{ik} - m_{ik}.$$

定义 2 若函数列$\{f_k(x)\}$在区间$[a,b]$上满足：对任意 $\varepsilon>0$，存在与 k 无关的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)$，使得

$$S_k(T) = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_{ik}\Delta x_i < \varepsilon$$

对一切 k 及对一切满足条件 $\lambda(T)<\delta$ 的任意分划 T 一致成立，则称$\{f_k(x)\}$在$[a,b]$上一致可积．

定理 16 若函数列$\{f_n(x)\}$在区间$[a,b]$上一致可积，且在$[a,b]$上收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积，且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx. \tag{4}$$

证 这里仅给出主要思路：首先证明$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致有界，再证 $f(x)$在$[a,b]$上可积，最后引用 Arzela 定理推得(4)式成立．

推论 2 若函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上收敛于 $f(x)$，且每个 $f_n(x)$在$[a,b]$上单调，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积且(4)式成立．

例 3 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{2}{\pi}x\sin x)^n dx$．

解 易见，$\{(\frac{2}{\pi}x\sin x)^n\}$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上收敛于函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0\leqslant x<\pi/2, \\ 1, & x=\pi/2. \end{cases}$$

因它并不一致收敛，故通常的积分号下取极限定理不能应用．但它满足推论 2 的条件，因此

$$I=\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\pi}x\sin x\right)^n dx=0.$$

例 4 求 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n e^{-x^2}dx$.

解 函数列$\{x^n e^{-x^2}\}$在$[0,1]$上非一致收敛于

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ e^{-1}, & x=1.\end{cases}$$

但由推论 2 知，$I=\int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty}x^n e^{-x^2}dx=0$.

注 4 这一小节的材料选自文献[19].

注 5 Luxemburg[147]介绍了 Riemann 积分意义下的 Arzela 定理，Fatou 引理和 Young 定理.

定理 17 (Arzela) 设$\{f_n(x)\}$是区间$[a,b]$上的可积函数列，且收敛于可积函数 $f(x)$. 若存在常数 $M>0$，使对一切 n 和 $x\in[a,b]$，都有$|f_n(x)|\leqslant M$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

定理 18 (Fatou) 设$\{f_n(x)\}$是区间$[a,b]$上的非负的可积函数列，且收敛于可积函数 $f(x)$，则

$$0\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

定理 19 (W. H. Young) 设$\{f_n(x)\}$，$\{g_n(x)\}$和$\{h_n(x)\}$，都是区间$[a,b]$上的可积函数列，且分别收敛于可积函数 $f(x)$，$g(x)$与 $h(x)$. 若对每个 n 和 $x\in[a,b]$，都有

$$h_n(x)\leqslant f_n(x)\leqslant g_n(x),$$

且有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)dx=\int_a^b g(x)dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b h_n(x)dx=\int_a^b h(x)dx,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

特别，当 $h_n(x)=-M, g_n(x)=M$ 时，便得定理 17.

最后介绍强于测度收敛而弱于一致收敛的一种所谓容度收敛的概念.

定义 3 设 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$和 $f(x)$都是定义在区间$[a,b]$上的函数. 若对任意 $\varepsilon>0$ 和 $\sigma>0$，存在自然数 $N(\varepsilon,\sigma)$，对任意 $n\geqslant N=N(\varepsilon,\sigma)$，存在$[a,b]$中有限个互不相交的闭区间的并(这里闭区间也可指一个点) $P(\varepsilon,\sigma,n)$，满足

$$l([a,b]\backslash P)<\sigma \ (l \text{ 指长度}),$$

且对任意 $x\in P$，不等式

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

成立，则称$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上容度收敛于 $f(x)$.

定理 20 若 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在区间$[a,b]$上可积，$f(x)$在$[a,b]$上有界，且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上容度收敛于 $f(x)$，则

(i) $f(x)$在$[a,b]$上可积.

(ii) 若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致有界，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

定理 21 若 $f_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上可积，且$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上测度收敛于 $f(x)$，则 $f(x)$在$[a,b]$上可积的充要条件是

$f(x)$在$[a,b]$上有界且$\{f_n(x)\}$容度收敛于 $f(x)$.

注 6 定理 20 和定理 21 选自王晓斐的[8].

4.3.5 函数项级数的逐项微分

关于函数项级数，有下述周知的逐项微分定理：

定理 22 设(i) $f_n(x)$ 在区间$[a,b]$ 上有连续的导函数，(ii) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在$[a,b]$ 上收敛于 $f(x)$，(iii) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}f'_n(x)$ 在$[a,b]$ 上一致收敛于 $g(x)$，则 $f(x)$ 在$[a,b]$ 上可导，且

$$f'(x)=g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f'_n(x).$$

为了推广定理 22，我们引入局部一致收敛的概念．

定义 4 设 $f_n(x)$，$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的函数，$x_0\in[a,b]$．若对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 和自然数 N，当 $|x-x_0|<\delta$，$n\geqslant N$ 时，就有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在点 x_0 局部一致收敛于 $f(x)$．

定理 23 设(i) $f_n(x)$在区间$[a,b]$上有连续的导函数，(ii) 函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上收敛于 $f(x)$，(iii) $\{f'_n(x)\}$在点 x_0 局部一致收敛于 $g(x)$，则 $f(x)$在点 x_0 可导，且 $f'(x_0)=g(x_0)$．

证 由微分中值定理得

$$f_n(x)=f_n(x_0)+(x-x_0)f'_n(x_0+\theta_n(x-x_0))\quad(0<\theta_n<1).$$

因$\{f'_n(x)\}$在点 x_0 局部一致收敛于 $g(x)$，故对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 和自然数 N，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 且 $n\geqslant N$ 时，就有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right.\\&\left.+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0+\theta_n(x-x_0))\right|\\&=\left|\frac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}-g(x_0+\theta_n(x-x_0))\right|\\&=|f'_n(x_0+\theta_n(x-x_0))-g(x_0+\theta_n(x-x_0))|\\&<\frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}\tag{5}$$

又因$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上收敛于 $f(x)$，故存在自然数 $N_1(x)$与 N_2，，当 $n\geqslant N_1(x)$时，有

$$\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{x-x_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{6}$$

而当 $n\geqslant N_2$ 时，有

$$\left|\frac{f(x_0)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{7}$$

于是，当 $n\geqslant\max\{N,N_1(x),N_2\}$，且 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，不等式(5)，(6)，(7)都成立．因此，

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0+\theta_n(x-x_0))\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{x-x_0}\right|+\left|\frac{f(x_0)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right|$$
$$+\left|\frac{f_n(x)-f(x)}{x-x_0}+\frac{f(x_0)-f_n(x_0)}{x-x_0}\right.$$
$$\left.+\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-g(x_0+\theta_n(x-x_0))\right|$$
$$<3\cdot\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

因 $g(x)$在 x_0 连续且数列$\{\theta_n\}$有界，故

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}g(x_0+\theta_n(x-x_0))=g(x_0).$$

注 7．若$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $f(x)$，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上的每一点都局部一致收敛于 $f(x)$．因此，定理 23 是定理 22 的推广．

注 8 这一小节的材料来源于文献[103].

§4.4 幂级数

4.4.1 幂级数逐项微分定理的一个简单证明

Výbovnǵ[179]介绍了幂级数逐项微分定理的一个证法，这个证法十分简单、直接，避免了使用一致收敛以及收敛半径存在等理论知识，而且还适用于复幂级数的微分．

引理 1 对任意复数 x,h，$0<|h|<H$，以及任意自然数 n，恒有

$$|(x+h)^n-x^n-hnx^{n-1}|\leqslant\frac{|h|^2}{H^2}(|x|+H)^n,\qquad(1)$$

$$|nx^{n-1}|\leqslant\frac{1}{H}\{2(|x|+H)^n+|x|^n\}.\qquad(2)$$

证 (i) 我们利用二项式定理，得

$$|(x+h)^n - x^n - hnx^{n-1}| \leqslant |h|^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k}|h|^{k-2}$$

$$\leqslant \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} H^k \leqslant \frac{|h|^2}{H^2}(|x| + H)^n.$$

(ii) 在(1)中令 $h=H$，便得

$$|(x+H)^n - x^n - Hnx^{n-1}| \leqslant (|x| + H)^n.$$

又从不等式

$$H|nx^{n-1}| - (|x| + H)^n - |x|^n \leqslant |(x+H)^n - x^n - Hnx^{n-1}|$$

便知不等式(2)成立.

定理 1 设幂级数 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有正的收敛半径 r(可能为 $+\infty$)，则 $f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 有相同的收敛半径，且对 $0\leqslant|x|<r$，有 $f'(x)=f_1(x)$.

证 取 $H>0$，使 $|x|+H<r$. 由(2)得

$$|na_n x^{n-1}| \leqslant \frac{1}{H}\{2|a_n|(|x| + H)^n + |a_n||x|^n\},$$

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ 绝对收敛. 由于 x 满足 $0\leqslant|x|<r$，所以 f_1 的收敛半径为 r 是成立的. 由(1)得

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f_1(x)\right| \leqslant \frac{|h|}{H^2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(|x| + H)^n.$$

令 $h\to 0$，我们立得 $f'(x)=f_1(x)$.

4.4.2 Taylor 公式的另一种证明

对带 Lagrange 余项的 Taylor 公式，可以运用类似 Lagrange 定理的证明技巧，给出另一种证明方法.

设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的导数，且在开区间 (a,b) 内二次可导. 现在，我们作连结 $A(a,f(a))$ 与 $B(b,f(b))$ 两点的二次曲线：

$$P_2(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2,$$

满足 $P_2(a)=f(a)$，$P_2(b)=f(b)$；$P'_2(a)=f'(a)$，则不难解出

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{R_2}{(b-a)^2}(x-a)^2,$$

式中 $R_2=f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)$.

作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-P_2(x)$，则有

$$\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi(b) = 0.$$

在$[a,b]$上对 φ 使用 Rolle 定理，便知存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0$. 再对 φ' 在$[a,\xi_1]$上使用 Rolle 定理，便知存在 $\xi\in(a,\xi_1)$，使得 $\varphi''(\xi)=0$. 因为

$$\varphi''(\xi) = f''(\xi) - P_2''(\xi) = f''(\xi) - \frac{2!R_2}{(b-a)^2},$$

所以 $R_2=\frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2$，从而

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(b-a)^2.$$

类似地，如果 f 在$[a,b]$上有连续的 n 阶导数，在开区间(a,b)内 $n+1$ 阶可导，作连结 $A(a,f(a))$与 $B(b,f(b))$两点的 $n+1$ 阶多项式

$$P_{n+1}(x) = A_0 + A_1(x-a) + \cdots + A_{n+1}(x-a)^{n+1},$$

满足 $P_{n+1}(a)=f(a)$，$P_{n+1}(b)=f(b)$，$P^k_{n+1}(a)=f^{(k)}(a)$ $(k=1,2,\cdots,n)$. 不难解出

$$P_{n+1}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{R_n}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1},$$

式中 $R_n=f(b)-[f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n]$.

作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-P_{n+1}(x)$，则 φ 在$[a,b]$上有连续的 n 阶导数，在(a,b)内 $n+1$ 次可导，且

$$\varphi(a) = \varphi(b) = \varphi^{(k)}(a) = 0,\ k = 1,2,\cdots,n.$$

对函数 φ 在$[a,b]$上使用 Rolle 定理，便知存在 $\xi_1\in(a,b)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0$. 再对函数 φ 在$[a,\xi_1]$上使用 Rolle 定理，便知存在 $\xi_2\in$

(a,ξ_1)，使得 $\varphi''(\xi_2)=0$．这样继续下去直到第 $n+1$ 次使用 Rolle 定理，便知存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$．注意到

$$\varphi^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}R_n,$$

所以 $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$，从而

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

这样我们就得到

定理 2（Taylor） 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的 n 阶导数，在开区间 (a,b) 内 $n+1$ 次可导，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

注 1 从上面的论证过程中，我们发现，一般说来下面的结论成立：

若函数 f 与 g 在 $[a,b]$ 上有连续的 n 阶导数，在 (a,b) 内 $n+1$ 次可导，且满足 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，$f^{(k)}(a)=g^{(k)}(a)$ $(k=1,2,\cdots,n)$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f^{(n+1)}(\xi)=g^{(n+1)}(\xi)$.

当 $n=0$ 时，取 g 为一次函数，便得到 Lagrange 定理．在一般情况下，若取 g 为前面提到的 $n+1$ 阶多项式 P_{n+1}，便得到带有 Lagrange 余项的 Taylor 公式．

注 2 这一小节的材料来源于文献[63].

4.4.3 关于 Taylor 公式的余项

我们先考虑具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式及作为它的特殊情况的微分中值定理，它们都有“中间点”．这里给出当所论区间之长趋于零时“中间点”的渐近状态．

设 a 与 x 属于某个区间，在此区间上导数 $f^{(n+p)}(x)$ $(n\geqslant 1,p$

$\geqslant 1$)存在且在 a 处连续. 此时可将 $f(x)$ 在 a 处展开成 n 阶 Taylor 公式:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n, \tag{3}$$

式中 ξ 在 a 与 x 之间.

定理 3 若对所有 $1\leqslant j<p$, $f^{(n+j)}(a)=0$ 而 $f^{(n+p)}(a)\neq 0$, 则

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\left[\frac{n!p!}{(n+p)!}\right]^{\frac{1}{p}}=\binom{n+p}{n}^{-\frac{1}{p}}.$$

证 由假设知, 可将(3)中的 $f^{(n)}(\xi)$ 展开成 p 阶 Taylor 公式, 然后再将 $f(x)$ 展开成 $n+p$ 阶 Taylor 公式, 得

$$f(x)=f(a)+f'(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+\frac{1}{n!}\left[f^{(n)}(a)+\frac{f^{(n+p)}(\xi_1)}{p!}(\xi-a)^p\right](x-a)^n, \tag{4}$$

式中 ξ_1 在 a 与 x 之间. 同时有

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+p)}(\xi_2)}{(n+p)!}(x-a)^{n+p}, \tag{5}$$

式中 ξ_2 在 a 与 x 之间. 由(4)与(5)得到

$$\frac{f^{(n+p)}(\xi_1)}{n!p!}(\xi-a)^p=\frac{f^{(n+p)}(\xi_2)}{(n+p)!}(x-a)^p,$$

即

$$\left(\frac{\xi-a}{x-a}\right)^p=\frac{n!p!}{(n+p)!}\cdot\frac{f^{(n+p)}(\xi_2)}{f^{(n+p)}(\xi_1)}.$$

当 $x\to a$ 时 ξ_1 与 ξ_2 都趋于 a, 故定理 3 的结论成立.

注 3 李文荣[33]对 Cauchy 中值定理的"中间点"介绍了下述渐近性定理:

定理 4 设函数 f 与 g 在点 a 的某领域 $U(a)$ 内有直到二阶导数, $g'\neq 0$, f'' 与 g'' 在点 a 连续, 且 $f''(a)g'(a)-f'(a)g''(a)\neq 0$, $x\in U(a)$, 则对 Cauchy 中值定理确定的数 ξ, 有

$$\lim_{x\to a}\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{1}{2}.$$

我们再介绍包括 Lagrange 余项和 Cauchy 余项作为特殊形式的更普遍的余项表达式.

定理 5 若 $f^{(n)}$ 在闭区间 $[x_0,x_0+h]$ $(h>0)$ 上连续，$f^{(n+1)}$ 在开区间 (x_0,x_0+h) 内存在，则对任意 $x\in[x_0,x_0+h]$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\cdot\frac{m(1-\theta)^n}{\sum_{i=1}^{m}p_i(1-\theta)^{p_i-1}}(x-x_0)^{n+1},$$

式中 $0<\theta<1$，$p_i>0$ $(i=1,2,\cdots,m)$.

证 令

$$F(z)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k$$
$$-\frac{R_n(x)}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x-z}{x-x_0}\right)^{p_i},$$

其中 $f^{(0)}(z)=f(z)$. 显然有 $F(x)=0$，$F(x_0)=R_n(x)-\frac{R_n(x)}{m}\cdot m=0$. 同时由定理的条件知 F 在 $[x_0,x]$ 上连续，F 在 (x_0,x) 内可导. 由 Rolle 定理知，存在 $c\in(x_0,x)$，使得 $F'(c)=0$. 而

$$F'(z)=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{(k-1)!}(x-z)^{k-1}$$
$$-\frac{R_n(x)}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i(x-z)^{p_i-1}}{(x-x_0)^{p_i}}$$
$$=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n+\frac{R_n(x)}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i(x-z)^{p_i-1}}{(x-x_0)^{p_i}},$$

所以

$$F'(c)=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{R_n(x)}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{p_i(x-c)^{p_i-1}}{(x-x_0)^{p_i}}$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$+\frac{R_n(x)}{m}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{m}p_i(x-c)^{p_i-1}(x-x_0)^{(\sum_{i=1}^{m}p_i)-p_i}}{(x-x_0)^{\sum_{i=1}^{m}p_i}}$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$+\frac{R_n(x)}{m}\cdot\frac{(x-x_0)^{(\sum_{i=1}^{m}p_i)-1}\cdot\sum_{i=1}^{m}p_i\left(\frac{x-c}{x-x_0}\right)^{p_i-1}}{(x-x_0)^{\sum_{i=1}^{m}p_i}}$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n+\frac{R_n(x)}{m(x-x_0)}\sum_{i=1}^{m}p_i\left(\frac{x-c}{x-x_0}\right)^{p_i-1}.$$

于是由 $F'(c)=0$ 得

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}\cdot\frac{(x-c)^n m(x-x_0)}{\sum_{i=1}^{m}p_i\left(\frac{x-c}{x-x_0}\right)^{p_i-1}}.$$

记 $c=x_0+\theta(x-x_0)$ $(0<\theta<1)$，则

$$x-c=(1-\theta)(x-x_0),$$

即 $(x-c)/(x-x_0)=1-\theta$，所以

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}\cdot\frac{m(1-\theta)^n}{\sum_{i=1}^{m}p_i(1-\theta)^{p_i-1}}(x-x_0)^{n+1}.$$

注 4 如果在定理 5 中令 $p_1=p_2=\cdots=p_m=n+1$，便可得到 Lagrange 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

式中 $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，$0<\theta<1$.

又若在定理 5 中令 $p_1=p_2=\cdots=p_m=1$，$\xi=x_0+\theta(x-x_0)$，则可得到 Cauchy 余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

如果在定理 5 中令 $p_1=p_2=\cdots=p_m=p>0$，则可得到

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!\,p}$$
$$\times(1-\theta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

注 5 定理 5 选自文献[47].

4.4.4 Taylor 公式的推广

我们知道，若函数 f,g 满足 Cauchy 中值定理的条件，则有

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

ξ 介于 a 与 x 之间，亦即

$$\begin{vmatrix} f(x)-f(a) & f'(\xi) \\ g(x)-g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

如果考虑三个函数 f,g,h，而将它们的导数推广到高阶，自然将导致三阶行列式公式的出现．进而有

定理 6 设函数 f,g,h 在闭区间$[a,x]$上分别具有$(m+n)$阶，$(p+q)$阶，$(r+s)$阶连续导数，$f^{(m+n+1)},g^{(p+q+1)},h^{(r+s+1)}$在开区间$(a,x)$内存在，则存在 $\xi\in(a,x)$，使得

$$\begin{vmatrix} \dfrac{(\xi-a)^n(x-\xi)^m}{(m+n)!}f^{(m+n+1)}(\xi) & (-1)^nS_{m,n}f(a,x) & f^{(n)}(x) \\ \dfrac{(\xi-a)^q(x-\xi)^p}{(p+q)!}g^{(p+q+1)}(\xi) & (-1)^qS_{p,q}g(a,x) & g^{(q)}(x) \\ \dfrac{(\xi-a)^s(x-\xi)^r}{(r+s)!}h^{(r+s+1)}(\xi) & (-1)^sS_{r,s}h(a,x) & h^{(s)}(x) \end{vmatrix}=0,$$

这里，

$$S_{m,n}f(a,x)=\sum_{k=0}^{m+n}\frac{(m+n-k)!}{(m+n)!}\left[(-1)^k\binom{n}{k}f^{(k)}(x)\right.$$
$$\left.-\binom{m}{k}f^{(k)}(a)\right](x-a)^k.$$

关于 $S_{p,q}g(a,x),S_{r,s}h(a,x)$有相似的定义．此外，在求和中当 $p<q$ 时，规定$\binom{p}{q}=0$.

证 对 $0\leqslant t\leqslant 1$,令

$$\varphi(t)=t^n(1-t)^m,\ \psi(t)=t^q(1-t)^p,\ \chi(t)=t^s(1-t)^r. \tag{6}$$

$$F(t)=\sum_{k=0}^{m+n}(-1)^{m+n+k}(x-a)^k\varphi^{(m+n-k)}(t)f^{(k)}(a+t(x-a)),$$

$$G(t)=\sum_{k=0}^{p+q}(-1)^{p+q+k}(x-a)^k\psi^{(p+q-k)}(t)g^{(k)}(a+t(x-a)),$$

$$H(t)=\sum_{k=0}^{r+s}(-1)^{r+s+k}(x-a)^k\chi^{(r+s-k)}(t)h^{(k)}(a+t(x-a)).$$

考虑函数

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix}\dfrac{F(t)-F(0)}{(m+n)!} & (-1)^nS_{m,n}f(a,x) & f^{(n)}(x)\\ \dfrac{G(t)-G(0)}{(p+q)!} & (-1)^qS_{p,q}g(a,x) & g^{(q)}(x)\\ \dfrac{H(t)-H(0)}{(r+s)!} & (-1)^sS_{r,s}h(a,x) & h^{(s)}(x)\end{vmatrix},$$

由 F,G,H 的定义,可得

$$F(1)-F(0)=(-1)^n(m+n)!S_{m,n}f(a,x),$$

$$G(1)-G(0)=(-1)^q(p+q)!S_{p,q}g(a,x),$$

$$H(1)-H(0)=(-1)^s(r+s)!S_{r,s}h(a,x).$$

因此,$\Delta(1)=\Delta(0)=0$. 此外,Δ 在开区间$(0,1)$内可导,故由 Rolle 定理便知存在 $\theta\in(0,1)$,使得 $\Delta'(\theta)=0$.

另一方面,有

$$F'(t)=(x-a)^{m+n+1}\varphi(t)f^{(m+n+1)}(a+t(x-a)), \tag{7}$$

$$G'(t)=(x-a)^{p+q+1}\psi(t)g^{(p+q+1)}(a+t(x-a)), \tag{8}$$

$$H'(t)=(x-a)^{r+s+1}\chi(t)h^{(r+s+1)}(a+t(x-a)). \tag{9}$$

因此,

$$\Delta'(t)=\begin{vmatrix}\dfrac{F'(t)}{(m+n)!} & (-1)^nS_{m,n}f(a,x) & f^{(n)}(x)\\ \dfrac{G'(t)}{(p+q)!} & (-1)^qS_{p,q}g(a,x) & g^{(q)}(x)\\ \dfrac{H'(t)}{(r+s)!} & (-1)^sS_{r,s}h(a,x) & h^{(s)}(x)\end{vmatrix}.$$

由 $\Delta'(\theta)=0$ 并结合(6),(7),(8)及(9),再令 $a=\theta(x-a)=\xi$,便得所需的结论.

注 6 在定理 6 中,令 $n=q=s=0$,便得文献[165]的结果.

在定理 6 中取

$$g(y)=\frac{y^{p+q+1}}{(p+q+1)!},\ h(y)=\frac{y^s}{s!},\quad a\leqslant y\leqslant x,$$

则 $g^{(p+q+1)}(y)=1$, $h^{(s)}(y)=1$, $h^{(r+s+1)}(y)=0$,且

$$\begin{aligned}S_{p,q}g(a,x)&=\frac{(-1)^q}{(p+q)!}[G(1)-G(0)]\\&=\frac{(-1)^q}{(p+q)!}\int_0^1 G'(t)dt\\&=\frac{(-1)^q(x-a)^{p+q+1}}{(p+q)!}\int_0^1 t^q(1-t)^p dt\\&=\frac{(-1)^q(x-a)^{p+q+1}p!q!}{(p+q)!(p+q+1)!}.\end{aligned}$$

现取 $p=m$, $q=n$,类似地有

$$S_{m,n}f(a,x)=\frac{(-1)^n(x-a)^{m+n+1}m!n!}{(m+n)!(m+n+1)!}.$$

这就是 Taylor 公式的 Hummel 和 Seebeck[132]的推广.

注 7 定理 6 选自文献[144].

4.4.5 每个幂级数必是某个函数的 Taylor 级数

我们知道,并非每个三角级数都是某个函数的 Fourier 级数.但是,每个幂级数却必是某个函数的 Taylor 级数.

定理 7 给定实数列 $\{a_n\}$,必存在一个函数 f,使得它的 Taylor 级数是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$,即 $f^{(n)}(0)=a_nn!$.

证 对 $n=0,1,2,\cdots$,定义函数列 g_n 为

$$g_n(x)=\begin{cases}a_nn!, & |x|\leqslant 1/(2|a_n|n!+1),\\ 0, & |x|\geqslant 2/(2|a_n|n!+1),\end{cases}$$

在其余部分,作任何光滑联结,使得在每个部分是单调的,并有任

意阶有穷导数．然后设 $f_0=g_0$，当 $n\geqslant 1$ 时设

$$f_n(x)=\int_0^x\int_0^{x_{n-1}}\cdots\int_0^{x_2}\int_0^{x_1}g_n(x_0)dx_0dx_1\cdots dx_{n-1}.$$

因对每一 $n\geqslant 1$，恒有

$$|f_n^{(n-1)}(x)|=\left|\int_0^x g_n(t)dt\right|\leqslant\left|\frac{2a_n n!}{2|a_n|n!+1}\right|<1,$$

故对不等式 $-1<f_n^{(n-1)}(x)<1$ $(n=1,2,\cdots)$ 积分 $n-k-1$ 次，就得到

$$|f_n^{(k)}(x)|\leqslant|x|^{n-k-1}/(n-k-1)!,\ k=0,1,\cdots,n-1,$$

其中规定 $f_n^{(0)}=f_n$．由 Weierstrass 判别法知，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(k)}(x)$ $(k\geqslant 0)$ 在每个有界区间上一致收敛．令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(x),$$

则可逐项求导：

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n^{(k)}(x),\ k\geqslant 1.$$

由于 $f_n^{(k)}(0)=a_n n!\ \delta_{nk}$，其中当 $n=k$ 时 $\delta_{nk}=1$，当 $n\neq k$ 时 $\delta_{nk}=0$，因而 $f^{(n)}(0)=a_n n!$．

推论 1 因为函数

$$g(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

的 Taylor 级数恒为零，故对上述函数 f 和任意实数 λ，函数 $h(x)=f(x)+\lambda g(x)$ 与函数 $f(x)$ 具有相同的 Taylor 级数．换言之，存在无穷多个函数，使它的 Taylor 级数为任一给定的幂级数．

注 8 定理 7 选自文献[149].

§4.5 三角级数

4.5.1 系数趋于零而又处处发散的三角级数的例子

三角级数

$$\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\cos k(x-\ln\ln x)}{\ln k} \tag{1}$$

的系数显然趋于零．但是对每一个 x，级数(1)发散．事实上，令

$$l_k=[\ln k],\ v_k=\ln\ln k,\ I_k=(v_k,v_{k+1}),$$

$$G_n(x)=\sum_{k=n+1}^{n+l_n}\frac{\cos k(x-v_k)}{\ln k},\ G_n=\sum_{k=n+1}^{n+l_n}\frac{1}{\ln k}.$$

因为 $G_n\geqslant\frac{l_n}{\ln(n+l_n)}\to 1\ (n\to\infty)$，所以存在自然数 n_0，当 $n\geqslant n_0$ 时，$G_n>0.9$，再由不等式 $|\sin u|\leqslant|u|$ 得到

$$\begin{aligned}0\leqslant G_n-G_n(x)&=\sum_{k=n+1}^{n+l_n}\frac{1-\cos k(x-v_k)}{\ln k}\\&=\sum_{k=n+1}^{n+l_n}\frac{2}{\ln k}\sin^2\frac{k(x-v_k)}{2}\\&\leqslant\frac{n+l_n}{2\ln n}\sum_{k=n+1}^{n+l_n}k^2(x-v_k)^2.\end{aligned} \tag{2}$$

若 $n<k\leqslant n+l_n$，则 $v_n<v_k\leqslant v_{n+l_n}$．因此，当 $x\in(v_n,v_{n+1})(n\geqslant 3)$ 时，就有

$$|x-v_k|\leqslant v_{n+l_n}-v_n.$$

应用微分中值定理，得到

$$|x-v_k|\leqslant\frac{l_n}{n\ln n}\leqslant\frac{1}{n}.$$

因此，存在自然数 n_1，当 $n\geqslant n_1$ 时，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\ln n}\sum_{k=n+1}^{n+l_n}k^2(x-v_k)^2\\&\leqslant\frac{1}{2\ln n}\sum_{k=n+1}^{n+l_n}(n+l_n)^2\cdot\frac{1}{n^2}\\&=\frac{(n+l_n)^2l_n}{2n^2\ln n}<0.6.\end{aligned}$$

于是由(2)可知，当 $n\geqslant\max\{n_0,n_1\}$ 时，

$$G_n(x)=G_n-(G_n-G(x))>0.9-0.6=0.3. \tag{3}$$

因为每一点 $x(\mathrm{mod}2\pi)$ 属于无穷多个区间 I_n，所以由(3)知级数

(1)对每一点 x 都发散.

4.5.2 Fourier 级数收敛定理的一个新证明

若

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx,\ n = 1,2,\cdots,$$

则称 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ 为函数 f 的 Fourier 级数. 据 Euler 公式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x,$$

f 的 Fourier 级数可写成复数形式:$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$,其中 $c_0 = a_0, c_n = a_n - ib_n, c_{-n} = a_n + ib_n$. 用积分形式表示可得

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt,$$

$$c_n = a_n - ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,$$

$$c_{-n} = a_n + ib_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt.$$

仿照 Fourier 积分的定义,记

$$\hat{f}(n) = \frac{c_n}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt,\ n = 0, \pm 1, \pm 2,\cdots,$$

则 f 的 Fourier 级数为 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$.

在 Fourier 级数理论中有下述著名的收敛定理:

定理 1 若 f 是以 2π 为周期的可积和绝对可积的函数,且对 $x_0 \in (-\pi,\pi)$,f 在 x_0 点存在左、右导数,则 f 的 Fourier 级数 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{inx}$ 在 x_0 点必收敛于 $f(x_0)$.

为证此定理,我们先证明下面的引理.

引理 1 若 f 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}(n)=0$.

证 因

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt-\frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt\ ,$$

而 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积，由 Riemann 引理，得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt=\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin ntdt=0\ ,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}(n)=0$.

定理 1 的证明 作辅助函数

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{e^{i(x-x_0)}-1}\ .$$

因 f 在 x_0 点的左、右导数存在，故

$$\lim_{x\to x_0^+}g(x)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{e^{i(x-x_0)}-1}=f'_+(x_0)\frac{1}{i}\ ,$$

$$\lim_{x\to x_0^-}g(x)=f'_-(x_0)\frac{1}{i}\ .$$

进而有

$$\lim_{x\to x_0^+}|g(x)|=|f'_+(x_0)|\ ,$$

$$\lim_{x\to x_0^-}|g(x)|=|f'_-(x_0)|\ .$$

若取 $M>\max\{|f_+(x_0)|,|f_-(x_0)|\}$，则必存在 $\delta>0$，使得对一切 $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\backslash\{x_0\}$，恒有 $|g(x)|<M$. 于是据函数的可积准则，函数

$$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{e^{i(x-x_0)}-1}\ .$$

在 $[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上必有界可积，因而它在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积. 这一方面说明 $g(x)$ 满足引理 1 的条件，应有 $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{g}(n)=0$；另一方面，我们也由此得到了 f 的又一表达式

$$f(x)=f(x_0)+g(x)[e^{i(x-x_0)}-1],$$

从而

$$\begin{aligned}\hat{f}(k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-ikt}dt\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x_0)+g(t)e^{i(t-x_0)}-g(t)]e^{-ikt}dt\\&=\frac{f(x_0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}dt+\frac{e^{-ix_0}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-i(k-1)t}dt-\\&\quad\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-ikt}dt.\end{aligned}$$

因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-ikt}dt=\hat{g}(k),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-i(k-1)t}dt=\hat{g}(k-1),$$

以及当 $k\neq 0$ 时，$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}dt=0$，而当 $k=0$ 时，$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ikt}dt=2\pi$，所以当 $k\neq 0$ 时，有

$$\hat{f}(k)=e^{-ix_0}\hat{g}(k-1)-\hat{g}(k),$$

而当 $k=0$ 时，有

$$\hat{f}(0)=e^{-ikx_0}\hat{g}(-1)-\hat{g}(0)+f(x_0),$$

并且

$$\begin{aligned}S_n(x_0)&=\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikx_0}\\&=\sum_{k=-n}^{n}[\hat{g}(k-1)e^{-ix_0}-\hat{g}(k)]e^{ikx_0}+f(x_0)\\&=\sum_{k=-n}^{n}[\hat{g}(k-1)e^{i(k-1)x_0}-\hat{g}(k)e^{ikx_0}]+f(x_0)\\&=\hat{g}(-n-1)e^{i(-n-1)x_0}-\hat{g}(n)e^{inx_0}+f(x_0).\end{aligned}$$

又因为 $\lim_{n\to\infty}\hat{g}(n)=0$，以及对任意整数 n，恒有 $|e^{inx_0}|\leqslant 2$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=f(x_0).$$

注 1 定理 1 来源于文献[35].

4.5.3 评注

远在 1906 年，Fatou[119]便提出这样一个问题：是否存在如此的三角级数，它的系数趋于零，而它本身在一个具有正测度的集合 E 上发散？1911 年，Лузин[97]肯定地回答了这个问题，他构造了一个在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处发散的三角级数，而它的系数却趋于零．1912 年，Steinhaus[176]又作出了一个处处发散的三角级数，它的系数趋于零，即本节 4.5.1．

如所周知，若函数 f 在区间 $[0,2\pi]$ 上是 Lebesgue 可积的，则由 Riemann-Lebesgue 引理可知，f 的 Fourier 系数趋于零．由于 Steinhaus 作出了一个处处发散的三角级数，它的系数趋于零，而 Fourier 级数是一类特殊的三角级数，当函数 f 为 Lebesgue 可积时，它的 Fourier 系数也趋于零，因而就进一步提出这样的问题：在区间 $[0,2\pi]$ 上是否存在如此的 Lebesgue 可积函数，它的 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 的某个正测度子集上发散？1923 年，Колмогоров[95]给出了这个问题的肯定答案，他作出了一个在 $[0,2\pi]$ 上 Lebesgue 可积的函数，这个函数的 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处发散．后来，Колмогоров[96]又进一步构造了一个在 $[0,2\pi]$ 上 Lebesgue 可积的函数，它的 Fourier 级数在 $[0,2\pi]$ 上到处都是发散的．

我们知道，函数的连续性并非是 Fourier 级数收敛的必要条件，那么函数 f 的 Fourier 级数在 f 的连续点是否一定收敛呢？早在 1876 年，Du Bois Reymond 已经对这个问题作了否定的回答，他作出了一个连续函数，其 Fourier 级数在某些点发散．1911 年，Féjer[120]构造了一个相当简单的连续函数，它的 Fourier 级数并不处处收敛．之后，又有人进一步构造了这样的连续函数，它的 Fourier 级数在具有连续统的势的集上发散．然而，关于连续函数的 Fourier 级数能否在正测度集上发散的问题，一直到 1966 年并没有解决；甚至还不知道，任何连续函数的 Fourier 级数是否至少能在一点收敛．Лузин 猜测连续函数的 Fourier 级数是几乎处处

收敛的，但长期以来，Лузин 猜测悬而未决．1966 年，Carleson[110] 证明了 L^2 可积函数的 Fourier 级数几乎处处收敛，这一结果蕴涵了连续函数的 Fourier 级数几乎处处收敛，从而证实了 Лузин 的猜测．其后，Hunt[133] 进一步证明了当 $p>1$ 时，$L^p[-\pi,\pi]$ 中的函数的 Fourier 级数也几乎处处收敛．

在作出发散三角级数的同时，人们也研究使级数收敛或者发散的集合．一般说来，使三角级数收敛的点所成之集都是 $F_{\sigma\delta}$ 型集[1)]，但不一定是 F_σ 型集．1918 年，Rajchman 对于已给的闭集 $E\subset[0,2\pi]$，作出了一个三角级数，它在 E 上收敛，在 $[0,2\pi]\setminus E$ 上发散，且它的系数趋于零．

1949 年，Herzog 和 Piranian[130] 对于已给的 F_σ 型集 $E\subset[0,2\pi]$，作出了一个 Taylor 级数，使它在 E 上收敛而在 $[0,2\pi]\setminus E$ 上发散．

1951 年，Стецкин[98] 作出了一个三角级数，它在已给的 F_σ 型集 E 上收敛而在 E 外发散．

1955 年，Zeller[186] 作出了一个函数 $f\in L[0,2\pi]$，它的 Fourier 级数在已给的 F_σ 型集 $E\subset[0,2\pi]$ 上收敛，而在 $[0,2\pi]\setminus E$ 上发散．至于能否作出一个三角级数，使它在已知的 F_σ 型集 $E\subset[0,2\pi]$ 上收敛于零而在 $[0,2\pi]\setminus E$ 上发散的问题，仍是至今尚未解决的一个难题．

---

1) 集 $E\subset[a,b]$ 叫做 $[a,b]$ 中的 $F_{\sigma\delta}$ 型集，是指 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n$，其中各个 E_n 都是 F_σ 型集，且 $E_n\subset[a,b]$.

第五章　多元函数

§5.1　导读

本章主要讨论多元函数的极限、微分、极值、积分和二重级数等多变量微积分学的基本内容. §5.2 给出多元函数的两种极限定义，并对它们进行比较. §5.3 以二元函数为例，讨论函数在某点连续、存在偏导数、弱可微(即在该点的各个方向导数都存在)、可微以及偏导数连续等基本概念之间的关系. §5.4 首先给出一类函数可微与连续可微的特征，接着研究函数可微的充分条件，最后介绍关于二阶混合偏导数相等的几个定理. §5.5 讨论二元函数与一元函数在基本性质上的几个不同之点. §5.6 介绍多元函数极值的一阶微分判别法；多元函数的最大值与最小值的一个例子；多元连续函数最大值与最小值的极限形式及其应用. §5.7 介绍多元凸函数的连续性与可微性，以及凸函数序列的一致收敛性. §5.8 讨论多元函数的次微分以及关于次微分的中值定理. §5.9 讨论二重积分与累次积分之间的关系；关于函数乘积积分的一个定理；含参变量的无穷限广义积分的绝对收敛与一致收敛性；恰当微分的线积分等. §5.10 介绍二重级数收敛的判别法. §5.11 介绍向量值函数的中值不等式和 Kantorovich 不等式的推广.

§5.2　多元函数极限的定义

多元函数的极限是数学分析中的基本概念之一. 关于这个基本概念(为简单起见，我们只考虑二元函数的极限)，在现行的数学分析教材中有范围不同的定义.

5.2.1 两种定义

定义 1 设函数 f 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某个邻域 D 内有定义(f 在点 P 可以没有定义). 如果对任意 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,对任意点 $Q(x,y)\in D$,当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 是函数 f 在点 $P(x_0,y_0)$ 的极限,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

在此定义中,点 $P(x_0,y_0)$ 的圆形邻域:$\{(x,y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$ 也可以换为点 $P(x_0,y_0)$ 的方形邻域 $\{(x,y)\mid |x-x_0|<\delta,|y-y_0|<\delta\}$ $(Q\neq P)$.

定义 2 设函数 f 在平面上的某一点集 D 上有定义,$P(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点(P 不一定属于 D),A 为一定数. 如果对任意 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得对任意点 $Q(x,y)\in D$,当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时,有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 是函数 f 在点 $P(x_0,y_0)$ 的极限,记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

与定义 1 一样,在定义 2 中点 $P(x_0,y_0)$ 的圆形邻域也可以换为点 $P(x_0,y_0)$ 的方形邻域.

5.2.2 两种定义的比较

在定义 1 中,点 $P(x_0,y_0)$ 的邻域是指以该点为中心的一个区域,它是单连通的. 所谓 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$,是指对任意 $\varepsilon>0$,总存在 $P(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域 $U_\delta(P)$ (圆形的或方形的),使不等式 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 在 $U_\delta(P)$ 内除 P 点而外是处处成立的.

与定义 1 比较，定义 2 的条件减弱了．它用以 P 为聚点的点集 D 代替以 P 为中心的邻域；用交集 $D\cap U_\delta(P)$ 内的一切点满足不等式 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，代替 $U_\delta(P)$ 内异于 P 的一切点满足这个不等式．

显然，对于一个给定的函数 f，若按定义 1，极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，则按定义 2 此极限必然存在，且其值相同．但应注意，若按定义 2 的极限存在，则按定义 1 的极限未必存在．下面我们举一个例子来说明这一事实．

例 考察极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$$

是否存在．

解 函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$ 的定义域是非连通的区域：

$$D=\{(x,y)\,|\,xy\neq 0,\ xy\geqslant -1\}.$$

按定义 2，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=2$．事实上，点 $P(0,0)\notin D$．但是，点 P 的任一邻域 $U_\delta(P)$ 都含有 D 的点，所以，P 是 D 的一个聚点．而 D 中的任一点 $Q(x,y)$ 都满足 $\sqrt{xy+1}-1\neq 0$，于是

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}-2\right|=\left|\sqrt{xy+1}-1\right|$$

$$=\left|\frac{xy+1-1}{\sqrt{xy+1}+1}\right|\leqslant |xy|\leqslant \frac{x^2+y^2}{2}.$$

因此，对任意的 $\varepsilon>0$，总存在 $\delta=\min\{\sqrt{2\varepsilon},1\}$，使 D 内适合不等式 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 的一切点 $Q(x,y)$，都满足不等式

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}-2\right|<\frac{x^2+y^2}{2}<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=2.$$

但按定义1，极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$不存在．事实上，$D$不包含$Ox$轴和$Oy$轴上的点．因此，除$P$外的一切点$Q(x,y)$，函数$f$都有定义，且满足不等式$|f(x,y)-A|<\varepsilon$的点$P$的邻域$U_\delta(P)$不存在，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$不存在．

§5.3 几个基本概念之间的关系

我们就二元函数来讨论在某点连续、偏导数存在、弱可微(即在该点的各个方向导数均存在)、可微以及偏导数连续这几个基本概念之间的关系．

可以证明，若二元函数f的偏导数f'_x及f'_y在点$P_0(x_0,y_0)$及其某一邻域内存在，且f'_x及f'_y在$P_0(x_0,y_0)$连续，则f在点$P_0(x_0,y_0)$必可微；若f在点$P_0(x_0,y_0)$可微，则f在点$P_0(x_0,y_0)$必定连续、弱可微且偏导数存在．因此，可得下列蕴涵关系：

$$\text{偏导数连续}\Rightarrow\text{可微}\Rightarrow\begin{cases}\text{连续}，\\ \text{偏导数存在}，\\ \text{弱可微}．\end{cases}$$

下面的一些例子指出，上述反方向的结论均不成立，而平行的三者两两互不蕴涵．

例1 函数的连续性与偏导数的存在性，二者互不蕴涵．

第一例．具有各阶偏导数的不连续函数．设

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{x^{-2}y^{-2}}/(e^{x^{-4}}+e^{y^{-4}}), & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$$

则f具有各阶偏导数．因为

$$\lim_{\substack{x=y\\ x\to 0}} f(x,y)=\frac{1}{2},$$

所以f在点$(0,0)$处不连续．

第二例．不存在偏导数的连续函数．

函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在全平面上处处连续，但它在原点的两个偏导数都不存在.

例 2 函数的连续性与弱可微性，二者互不蕴涵.

第一例. 在某点弱可微，而在该点并不连续的函数. 设

$$f(x,y)=\begin{cases}x^5/[(y-x^2)^2+x^6], & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

兹证函数 f 在点 $(0,0)$ 处沿任何方向都是可微的.

事实上，令 $\rho=(\cos\theta,\sin\theta)$，因为

$$\begin{aligned}F(t)&=f(t\cos\theta,t\sin\theta)\\&=\begin{cases}t^5\cos^5\theta/[(t\sin\theta-t^2\cos^2\theta)^2+t^6\cos^6\theta], & t\neq0\\ 0, & t=0\end{cases}\\&=\begin{cases}t^3\cos^5\theta/[(\sin\theta-t\cos^2\theta)^2+t^4\cos^6\theta], & t\neq0,\\ 0, & t=0.\end{cases}\end{aligned}$$

所以当 $\sin\theta\neq0$ 时，

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{t\to0}\frac{F(t)-F(0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{t^2\cos^5\theta}{(\sin\theta-t\cos^2\theta)^2+t^4\cos^6\theta}=0,\end{aligned}$$

而当 $\sin\theta=0$ 时，

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{t\to0}\frac{F(t)-F(0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{\cos^5\theta}{\cos^4\theta+t^2\cos^6\theta}=\cos\theta.\end{aligned}$$

因此，函数 f 在点 $(0,0)$ 处沿任何方向都是可微的，即 f 在 $(0,0)$ 处是弱可微的.

另一方面，当点 (x,y) 沿着曲线 $y=x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时，极限

$$\lim_{\substack{y=x^2\\x\to0}}\frac{x^5}{(y-x^2)^2+x^6}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}$$

不存在，从而 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在，因此，f 在 $(0,0)$ 处不连续.

第二例. 连续而不弱可微的函数.

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

显然，f 在全平面上处处连续，但它在$(0,0)$处并不弱可微．

例 3 函数的弱可微与偏导数存在，二者互不蕴涵．

第一例．在某点偏导数存在，但在该点并不弱可微的函数．

考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x, & y=0,\\ y, & x=0,\\ 1, & \sqrt{x^2+y^2}=1/n \text{ 且 } x\neq 0, y\neq 0, n=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

由于 $f(x,0)=x$，因而 $f'_x(0,0)=1$．同样，$f'_y(0,0)=1$．但对任何 $\alpha\neq 0$，在直线 $y=\alpha x$ 上，

$$f(x,\alpha x)=\begin{cases}1, & \sqrt{x^2+\alpha^2x^2}=1/n, \text{即 } |x|=1/n\sqrt{1+\alpha^2},\\ & n=1,2,\cdots,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

这个函数在 $x=0$ 是不连续的，当然不可能有有穷的导数．这说明了虽然 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 都存在，但 f 在原点并不弱可微．

第二例．在某点弱可微而偏导数不存在的函数．

函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点$(0,0)$是弱可微的，但它在该点的偏导数并不存在．

例 4 偏导数均不连续的可微函数．设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

它的偏导数是

$$f'_x(x,y)=-x\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})/\sqrt{x^2+y^2}+2x\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}),\quad x^2+y^2\neq 0,$$

$$f'_y(x,y)=-y\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})/\sqrt{x^2+y^2}+2y\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}),\quad x^2+y^2\neq 0,$$

$$f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0 .$$

易见，$f'_x(x,y)$和$f'_y(x,y)$在点$(0,0)$都是不连续的．另一方面．因为

$$f(x,y) - f(0,0) = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}\sin(1/\sqrt{x^2+y^2}) ,$$

所以f在点$(0,0)$是可微的．

§5.4 多元函数的微分

为了叙述问题的方便，在本节中我们通常只讨论二元函数．

5.4.1 一类函数可微与连续可微的特征

设函数f在开区间(a,b)内可微．令$D=\{(x,y)\mid a<x<b, a<y<b\}$，任取$(x,y)\in D$，定义函数

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} , & x \neq y , \\ f'(x) , & x = y . \end{cases} \tag{1}$$

对此二元函数F，我们有下述问题：

(i) F在D上可微的充要条件是什么？

(ii) F在D上连续可微的充要条件是什么？

这个问题与f'在区间(a,b)上的可微及连续可微性有关．

定理1 若F是由(1)式定义的函数，则有

(i) F在D上可微的充要条件是f'在区间(a,b)上可微；

(ii) F在D上连续可微的充要条件是f'在区间(a,b)上连续可微．

证 (i) 我们知道，F在点$(x,y)\in D$可微的充要条件是下述等式成立：

$$F(x+h,y+k) = F(x,y) + F'_x(x,y)h + F'_y(x,y)k + o(\sqrt{h^2+k^2}) . \tag{2}$$

若F在D上的每一点可微，则显然f'在区间(a,b)内可微．反之．若f'在区间(a,b)内可微，即f二次可微，则由F的表达式(1)即

知，当点$(x,y)\in D, x\neq y$时，F可微．对点$(x,x)\in D$，令

$$g(t)=f(x+t)-tf'(x)-t^2f''(x)/2.$$

因$g'(0)=0, g''(0)=0$，故知$g'(t)=o(t)$．由微分中值定理，在h与k之间存在c，使得

$$\frac{g(h)-g(k)}{h-k}=g'(c)=o(|h|+|k|). \tag{3}$$

据函数g的表达式，有

$$\frac{g(h)-g(k)}{h-k}=F(x+h,x+k)-F(x,x)-\frac{1}{2}(h+k)f''(x). \tag{4}$$

由(3)和(4)得

$$F(x+h,x+k)=F(x,x)+(h+k)f''(x)/2+o(|h|+|k|).$$

但$o(|h|+|k|)=o(\sqrt{h^2+k^2})$，于是由$F$可微的充要条件式(2)便知$F$在点$(x,x)$可微，且

$$F'_x(x,x)=f''(x)/2.$$

(ii) 若F连续可微，则f''显然连续．反之，若f''连续，则对$(x,y)\in D$，有

$$\int_0^1 f'[y+t(x-y)]dt=\int_0^1\frac{1}{x-y}df[y+t(x-y)]$$

$$=\frac{1}{x-y}f[y+t(x-y)]\Big|_{t=0}^{t=1}=F(x,y).$$

因此

$$F'_x(x,y)=\int_0^1 tf''[y+t(x-y)]dt.$$

显然，$F'_x(x,y)$在点(x,y)连续．同理可证，$F'_y(x,y)$在点(x,y)连续．因此，F在点(x,y)可微．

5.4.2 关于可微性

设$\mathbb{R}^n$表示n维欧氏空间，$P_0\in\mathbb{R}^n$．一般的数学分析教材都指出：偏导数的存在是n元函数在P_0点可微的必要条件，且当诸偏

导数都在 P_0 点连续时才保证函数在 P_0 点的可微性．实际上，后者的条件是可以减弱的．首先，我们有下面的定理：

定理 2 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的偏导数存在，且至多只有一个偏导数不连续，则 f 可微．

证 为简单起见，我们就 $n=3$ 的情况来证明，一般情形的证明与此类似．

不妨设 f 的偏导数 $f'_x(x,y,z)$ 与 $f'_y(x,y,z)$ 连续，$f'_z(x,y,z)$ 存在但不连续．设 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$，由 $f'_z(x_0,y_0,z_0)$ 的存在性，我们有

$$f'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z = f(x_0,y_0,z_0+\Delta z) - f(x_0,y_0,z_0)+\alpha(\Delta z)\ , \tag{5}$$

其中 $\alpha(\Delta z)$ 是比 Δz 较高阶的无穷小量．又由微分中值定理，

$$\begin{aligned} &f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)\\ &=f'_y(x_0,y_0+\theta\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y \quad (0<\theta<1)\ . \end{aligned} \tag{6}$$

由假定，偏导数 $f'_y(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 连续，所以

$$\lim_{\rho\to 0} f'_y(x_0,y_0+\theta\Delta y,z_0+\Delta z)=f'_y(x_0,y_0,z_0)\ ,$$

其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，从而

$$\begin{aligned} &f'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y\\ &=f'_y(x_0,y_0+\theta\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y+\Delta y\lambda(\rho)\ , \end{aligned}$$

其中当 $\rho\to 0$ 时，$\lambda(\rho)\to 0$．记 $\beta(\rho)=\Delta y\lambda(\rho)$，则由不等式

$$\begin{aligned} \left|\frac{\Delta y\lambda(\rho)}{\rho}\right| &= \left|\frac{\Delta y\lambda(\rho)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}\right|\\ &\leqslant |\lambda(\rho)|\ , \end{aligned}$$

知 $\beta(\rho)$ 是比 ρ 较高阶的无穷小量，从而由式(6)得到

$$\begin{aligned} &f'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y=f'_y(x_0,y_0+\theta\Delta y,z_0+\Delta z)\Delta y+\beta(\rho)\\ &=f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0+\Delta z)+\beta(\rho). \end{aligned} \tag{7}$$

同理可得

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$$

$$-f(x_0,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)+\gamma(\rho)\ , \tag{8}$$

其中 $\gamma(\rho)$ 是比 ρ 较高阶的无穷小量．把(5),(7)和(8)式相加得

$$\begin{aligned}&f'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y+f'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z\\&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)\\&\quad+\alpha(\Delta z)+\beta(\rho)+\gamma(\rho)\\&=\Delta f+\alpha(\Delta z)+\beta(\rho)+\gamma(\rho)\ .\end{aligned}$$

令 $o(\rho)=-[\alpha(\Delta z)+\beta(\rho)+\gamma(\rho)]$，容易知道 $o(\rho)$ 是比 ρ 较高阶的无穷小量，故有

$$\begin{aligned}\Delta f=&f'_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y\\&+f'_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z+o(\rho)\ ,\end{aligned}$$

即函数 f 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 点可微．证毕．

特别，当 $n=2$ 时，我们有下面的结论：

推论 1 若函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 的偏导数存在，且至少有一个偏导数连续，则 f 可微．

这里，人们自然要问：对一般的 $n(n\geqslant 3)$ 元函数，推论 1 的结论是否仍然成立？或者，定理 2 中“至多只有一个偏导数不连续”的条件能否减弱成有两个偏导数不连续？遗憾的是，这个问题的答案是否定的．反例如下：

例 1 设

$$u=f(x,y,z)=\begin{cases}x\sqrt[3]{x}+\dfrac{y^2z}{y^2+z^2}\ , & y^2+z^2\neq 0\ ,\\ 0\ , & y^2+z^2=0\ ,\end{cases}$$

则函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $O(0,0,0)$ 点存在偏导数，且偏导数 $f'_x(x,y,z)$ 连续，但函数 f 在 $O(0,0,0)$ 点不可微．事实上，

$$f'_y(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{2yz^3}{(y^2+z^2)^2}\ , & (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0\ , & (x,y,z)=(0,0,0),\end{cases}$$

$$f'_z(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{y^4-y^2z^2}{(y^2+z^2)^2}\ , & (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0\ , & (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

容易知道，$f'_y(x,y,z)$与$f'_z(x,y,z)$在$O(0,0,0)$点均不连续，而$f'_x(x,y,z)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$显然在$O(0,0,0)$点连续．又当点$P(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$沿着直线$x=y=z$趋于$O(0,0,0)$点时，有

$$\begin{aligned}&\Delta u-[f'_x(0,0,0)\Delta x+f'_y(0,0,0)\Delta y+f'_z(0,0,0)\Delta z]\\&=\Delta x\sqrt[3]{\Delta x}+\frac{(\Delta y)^2\Delta z}{(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\\&=\Delta x\sqrt[3]{\Delta x}+\frac{1}{2}\Delta x,\end{aligned}$$

而极限

$$\begin{aligned}&\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta u-[f'_x(0,0,0)\Delta x+f'_y(0,0,0)\Delta y+f'_z(0,0,0)\Delta z]}{\rho}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\sqrt[3]{\Delta x}+\frac{1}{2}\Delta x}{\sqrt{3}\,|\Delta x|}\end{aligned}$$

不存在，故函数$u=f(x,y,z)$在$O(0,0,0)$点不可微．

5.4.3 二阶混合偏导数相等的定理

在数学分析教材中，关于二阶混合偏导数相等的定理，有下列四种：

定理 3 设二元函数f在开区域G内存在一阶偏导数，在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域$U(P_0)$中仅知混合偏导数之一，例如$f''_{xy}(x,y)$存在，且极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f''_{xy}(x,y)=A$$

存在，则在点$P_0(x_0,y_0)$处，另一个混合偏导数$f''_{yx}(x,y)$也存在，且

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0).$$

定理 4 设二元函数f的偏导数f'_x，f'_y和f''_{yx}在点$P_0(x_0,y_0)$的某邻域内存在，且f''_{yx}在点$P_0(x_0,y_0)$连续，则$f''_{xy}(x_0,y_0)$也存在，且

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\ .$$

定理 5 若二元函数 f 的二阶混合偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$都在点 $P_0(x_0,y_0)$连续，则

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\ .$$

定理 6 设二元函数 f 的偏导数 f'_x,f'_y 在点 $P_0(x_0,y_0)$的某邻域内存在且在点 $P_0(x_0,y_0)$可微，则

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\ .$$

以上四个定理的条件互有差异，经过分析，可知它们之间有下列关系：

(i) 定理 5 与定理 4 的条件都比定理 3 的条件强，故定理 3 优于定理 4 与定理 5.

(ii) 定理 4 和定理 6 互不包含；定理 3 和定理 6 也互不包含. 现用反例予以说明.

例 2 设

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}+y^2\sin\dfrac{1}{y}, & xy\neq 0,\\ x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,y=0,\\ y^2\sin\dfrac{1}{y}, & x=0,y\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则

$$f'_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{y}-\cos\dfrac{1}{y}, & y\neq 0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

显然，f'_x 与 f'_y 在原点 $O(0,0)$都间断，因而它们在原点是不可微的. 然而

$$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=0\ ,$$

所以 f''_{xy} 与 f''_{yx} 都是连续的．这就说明了混合偏导数 f''_{xy} 连续并不蕴涵 f'_x 与 f'_y 可微，即定理 4 不包含定理 6. 同样，定理 3 不包含定理 6.

例 3 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^3\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$$

则

$$f'_x(x,y)=6x(x^2+y^2)^2\sin\frac{1}{x^2+y^2}-2x(x^2+y^2)\cos\frac{1}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\neq 0,$$

$$f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=f'_x(0,y)=0,$$

$$f''_{xy}(x,y)=24xy(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-12xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}-4xy\cos\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{4xy}{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2},\quad x^2+y^2\neq 0,$$

$$f''_{xx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'_x(\Delta x,0)-f'_x(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6(\Delta x)^5\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}-2(\Delta x)^3\cos\dfrac{1}{(\Delta x)^3}}{\Delta x}=0.$$

同理，$f''_{xy}(0,0)=0$．而

$$\Delta f'_x(0,0)=6\Delta x[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^2\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}-2\Delta x[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\cos\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f'_x(0,0)-f''_{xx}(0,0)\Delta x-f''_{xy}(0,0)\Delta y}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{\Delta f'_x(0,0)}{\rho} = 0 ,$$

式中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，故 f'_x 在原点 $O(0,0)$ 可微，同理，f'_y 在原点可微.

但由 f''_{xy} 的表示式显然可见，极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f''_{xy}(x,y)$ 不存在. 因此，定理 6 的条件不蕴涵定理 3 的条件，更不蕴涵定理 4 的条件，所以定理 3(定理 4)和定理 6 互不包含.

(iii) 由例 2 与例 3 可知，定理 3 至定理 6 的条件，都是二阶混合偏导数相等的充分而不是必要条件.

下面，我们进一步给出判别二元函数的二阶混合偏导数相等的几个定理.

定理 7 若二元函数 f 满足：(i) f''_{xy}, f''_{yx} 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$ 内存在；(ii) f''_{xy} 在点 P_0 关于 x 连续，f''_{yx} 在点 P_0 关于 y 连续，则

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0) .$$

证 不妨设

$$U(P_0) = \{(x,y) \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, y_0 - \sigma < y < y_0 + \sigma\} ,$$

式中 $\delta > 0, \sigma > 0$. 取 $|\Delta x| < \delta$，$|\Delta y| < \sigma$，并考察函数

$$\varphi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) .$$

因为 φ 在开区间 $(y_0 - \sigma, y_0 + \sigma)$ 内有导数

$$\varphi'(y) = f'_y(x_0 + \Delta x, y) - f'_y(x_0, y) ,$$

所以

$$\begin{aligned} \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0) &= \varphi'(y_0 + \xi_1 \Delta y)\Delta y \\ &= [f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 + \xi_1 \Delta y) - f'_y(x_0, y_0 + \xi_1 \Delta y)]\Delta y \\ &= [f''_{yx}(x_0, y_0 + \xi_1 \Delta y)\Delta x + o(\Delta x)]\Delta y \\ &= f''_{yx}(x_0, y_0 + \xi_1 \Delta y)\Delta x \Delta y + o(\Delta x)\Delta y, \end{aligned} \tag{9}$$

式中 $0 < \xi_1 < 1$. 再考察函数

$$\psi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) ,$$

同理可得

$$\psi(x_0+\Delta x)-\psi(x_0)=f''_{xy}(x_0+\xi_2\Delta x,y_0)\Delta x\Delta y+o(\Delta y)\Delta x\ ,\tag{10}$$

式中 $0<\xi_2<1$. 因为

$$\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$$
$$-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0),$$
$$\psi(x_0+\Delta x)-\psi(x_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$$
$$-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0),$$

故由(9)、(10)得到

$$f''_{yx}(x_0,y_0+\xi_1\Delta y)\Delta x\Delta y+o(\Delta x)\Delta y$$
$$=f''_{xy}(x_0+\xi_2\Delta x,y_0)\Delta x\Delta y+o(\Delta y)\Delta x\ .\tag{11}$$

因为

$$\frac{o(\Delta x)\Delta y}{\Delta x\Delta y}=\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\to 0\ (\Delta x\to 0),$$
$$\frac{o(\Delta y)\Delta x}{\Delta x\Delta y}=\frac{o(\Delta y)}{\Delta y}\to 0\ (\Delta y\to 0),$$

且 f''_{yx}在点 P_0 关于 y 连续，f''_{xy}在点 P_0 关于 x 连续，故由式(11)可知，当$(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$时，有 $f''_{yx}(x_0,y_0)=f''_{xy}(x_0,y_0)$.

定理 8 设二元函数 f 在某一开集 G 上存在二阶偏导数 f''_{xy} 和 f''_{yx}，且 f''_{xy}关于 x 连续，f''_{yx}关于 y 连续，则 $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$在 G 上恒成立 .

证 由定理 7 即知定理 8 成立 .

注 1 定理 7 是定理 5 的推广 . 用定理 7 判别二阶混合偏导数是否相等比定理 5 来得方便 .

定理 9 若二元函数 f 满足：(i) f'_x,f'_y及 f''_{yx}在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域 $U(P_0)$内存在；(ii) f''_{yx}在点 P_0 关于 y 连续，则 $f''_{xy}(x_0,y_0)$存在，且

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)\ .$$

证 不妨设

$U(P_0)=\{(x,y)\,|\,x_0-\delta<x<x_0+\delta,y_0-\sigma<y<y_0+\sigma\}$ ，式中 $\delta>0,\sigma>0$. 取 $|h|<\delta,|k|<\sigma$，并考察以 h,k 为变元的二元

函数

$$F(h,k)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+k)+f(x_0,y_0). \tag{12}$$

令 $\varphi(y)=f(x_0+h,y)-f(x_0,y)$，则

$$\varphi(y_0+k)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k),$$

$$\varphi(y_0)=f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0),$$

从而 $F(h,k)=\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)$. 由假设(i)，$f$ 在 $U(P_0)$ 内存在一阶偏导数，所以一元函数 φ 在点 y_0 与 y_0+k 之间可导. 由微分中值定理有

$$\begin{aligned}F(h,k)&=\varphi(y_0+k)-\varphi(y_0)\\&=\varphi'(y_0+\theta k)k\\&=[f'_y(x_0+h,y_0+\theta k)-f'_y(x_0,y_0+\theta k)]k,\end{aligned} \tag{13}$$

式中 $0<\theta<1$. 另一方面，由假设(i)及二阶偏导数的定义，有

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f'_x(x_0,y_0+k)-f'_x(x_0,y_0)}{k}, \tag{14}$$

由一阶偏导数的定义，有

$$f'_x(x_0,y_0+k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0+k)}{h}, \tag{15}$$

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}. \tag{16}$$

将(15)、(16)两式代入(14)式，注意到(12)式，我们有

$$f''_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{F(h,k)}{hk}. \tag{17}$$

由假设(i)，f''_{yx} 在 $U(P_0)$ 内存在，故由(13)式知，对于区间 $(-\sigma,\sigma)$ 内任何异于 0 的点 $\tilde{k}$，极限

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{F(h,\tilde{k})}{h\tilde{k}}&=\lim_{h\to 0}\frac{\tilde{k}[f'_y(x_0+h,y_0+\theta\tilde{k})-f'_y(x_0,y_0+\theta\tilde{k})]}{h\tilde{k}}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f'_y(x_0+h,y_0+\theta\tilde{k})-f'_y(x_0,y_0+\theta\tilde{k})}{h}\\&=f''_{yx}(x_0,y_0+\theta\tilde{k})\end{aligned}$$

都存在．此极限是 $\tilde{k}$ 的函数，记作 $\psi(\tilde{k})$．由假设(ii)，f''_{yx} 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 关于 y 连续，从而有

$$\lim_{\tilde{k}\to 0}\psi(\tilde{k}) = \lim_{\tilde{k}\to 0} f''_{yx}(x_0,y_0+\theta\tilde{k}) = f''_{yx}(x_0,y_0)\ .$$

据累次极限的定义，等式(17)右端的极限存在，且有

$$\lim_{k\to 0}\lim_{h\to 0}\frac{F(h,k)}{hk} = f''_{yx}(x_0,y_0)\ . \tag{18}$$

比较(17)、(18)两式知 $f''_{xy}(x_0,y_0)$ 存在，且有

$$f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)\ .$$

注 2　定理 4 是定理 9 的特例.

5.4.4　评注

我们知道，一元函数的可导性与可微性是等价的，而对多元函数来说，偏导数的存在性与函数的可微性却不等价．在定理 1 中，由在开区间 (a,b) 内可微的一元函数 f 定义了一个二元函数 F，这个二元函数在区域 $D=\{(x,y)\mid a<x<b, a<y<b\}$ 上的可微性等价于 f' 在区间 (a,b) 内的可微性．应当注意，这只是对构造特殊的二元函数得到的结论，对于一般的二元或多元函数，我们还没有可微的等价条件．

由于多元函数的可微性比偏导数的存在性要强得多，因此，在许多情况下都加上偏导数连续的条件来实现函数的可微性．然而，要求函数的所有偏导数都连续，这有些过分．实际上，这个条件是可以减弱的．1984 年，Henle[129]依据多元函数在某点可微等价于(该函数所代表的)曲面在该点存在切平面的几何结论，利用向量的方法证明了下面的定理：

Henle 定理　若函数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 存在偏导数，且至少有一个偏导数连续，则 f 可微．

李思源[37]指出：Henle 定理可依照我国目前流行的叙述方式予以简化，且当 $n\geqslant 3$ 时定理不再成立．

在本节中，我们给出了 n 元函数可微的一个充分条件，即定理 2(这一结果是新的)．定理 2 及例 1 告诉我们，为了使一般的 n 元

函数可微，其不连续的偏导数不能多于一个．当 $n=2$ 时，定理 2 就成了 Henle 定理(见推论 1)．

本节关于二阶混合偏导数相等的材料分别来源于文献[45]、[22]和[55]等．

§5.5 二元函数与一元函数性质的基本差异

二元函数是一元函数的推广，其性质与一元函数有很多类似之处，但也有许多本质的差异．下面，我们列举二元函数与一元函数在基本性质上的一些不同之点：

1. 对一元函数来说，若函数在某点可导，则这函数在该点必定连续．而对二元函数来说，若函数在某点存在两个一阶偏导数，则这函数在该点未必连续．例如，考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}}, & xy\neq 0, \\ 0, & xy=0. \end{cases}$$

容易证明，f 具有各阶偏导数 $\partial^{n+m}f(x,y)/\partial x^m\partial y^n(n,m=0,1,2,\cdots)$．因为当 $t\neq 0$ 时，$f(t,t)=e^{-2}$，而 $f(0,0)=0$，所以 f 在点(0,0)不连续．

2. 对一元函数而言，若函数在某点有导数，则这函数在该点也是可微的．但对于二元函数，即使这个函数在某点连续且有两个偏导数，它在该点也未必是可微的．例如，考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

容易知道，f 在点(0,0)连续，且 $f'_x(0,0)=0, f'_y(0,0)=0$．但是，f 在点(0,0)不可微．

3. 对一元函数 $y=f(x)$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的左右极限都存在且相等．对于二元函数 $z=f(x,y)$，若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 存在，则 $f(x,y)$ 沿着任何

方向$(\cos\alpha,\sin\alpha)$的极限都存在且等于A. 然而,这个命题之逆并不成立. 例如,考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

对任意α,$f(x,y)$沿着方向$(\cos\alpha,\sin\alpha)$的极限

$$\lim_{\rho\to0^+}f(\rho\cos\alpha,\rho\sin\alpha)$$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^4\cos\alpha\sin^3\alpha}{\rho^2\cos^2\alpha+\rho^6\sin^6\alpha}=0.$$

但是,函数$f(x,y)$在$(0,0)$点的极限并不存在. 事实上,如果$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$存在,那么必有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$$

因此,对于过$(0,0)$的曲线$y=\sqrt[3]{x}$,应该有$\lim\limits_{x\to0}f(x,\sqrt[3]{x})=0$. 然而,

$$\lim_{x\to0}f(x,\sqrt[3]{x})=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2},$$

此乃矛盾!

4. 对于一元函数$y=f(x)$,若在区间$[a,b]$上$f'(x)\equiv0$,则$f(x)$必为$[a,b]$上的常值函数. 对于二元函数$z=f(x,y)$,若在区域D内$f'_y(x,y)\equiv0$,则这个二元函数在D内未必与y无关. 例如,设

$$L=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\leqslant0,y=0\},$$

$$D=\mathbb{R}^2\backslash L,$$

其中$\mathbb{R}^2$为二维欧氏空间. 在D上定义二元函数f:

$$f(x,y)=\begin{cases}-x^3, & x>0\text{且}y>0,\\ 0, & \text{其它的}(x,y)\in D.\end{cases}$$

显然,f在D内可微,并有连续的二阶偏导数. 虽然f关于y的一阶偏导数$f'_y(x,y)$在D内恒等于0,但是在D内f并非与y无关. 例如,$f(1,1)=-1$,而$f(1,-1)=0$.

这个例子表明，为了证明在整个区域 D 内一阶偏导数恒等于 0 的二元函数是常值函数，下面的证法无效："既然 $f_x(x,y)\equiv 0$，那么 f 不依赖于 x；既然 $f_y(x,y)\equiv 0$，那么 f 不依赖于 y；f 既不依赖于 x 也不依赖于 y，所以 f 一定是个常数".

5. 对于一元函数 $y=f(x)$，设它在区间 I（这里，I 是任意区间）内可微，又在 I 内有唯一的驻点 x_0，如果 x_0 是极大（小）值点，那么 x_0 就是 $f(x)$ 在 I 上的最大（小）值点．对于二元函数，相应的命题并不成立．例如，令

$$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2.$$

我们在矩形区域 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 4,-1\leqslant y\leqslant 1\}$ 上来研究它的最大值．容易验证，在 D 内 f 只有一个驻点 $(0,0)$，且 $(0,0)$ 是 f 在 D 内的极大值点，在这一点上有极大值 $f(0,0)=0$．然而 0 不是 f 在 D 上的最大值．函数的最大值出现在边界点 $(4,1)$ 上，最大值为 $f(4,1)=7$（具体计算参看下节例 2）．

6. 对一元函数 $y=f(x)$，Paine[157]证明了：$f(x)$ 在区间 I（这里，I 为任意区间）上一致连续的充要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$，存在常数 P，使当 $|f(x)-f(y)|>P|x-y|$ 时，就有

$$\begin{aligned}&\|(x,f(x))-(y,f(y))\|\\&=\sqrt{(x-y)^2+(f(x)-f(y))^2}<\varepsilon.\end{aligned}\tag{1}$$

Klopfenstein 和 Telste[141]指出，对于二元函数，这一命题不再成立．例如，令

$$L=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,-1\leqslant y\leqslant 1\},\ D=\mathbb{R}^2\backslash L,$$

其中 $\mathbb{R}^2$ 为二维欧氏空间．在 D 上定义函数 f：

$$f(x,y)=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\text{ 且 }y>1,\\ -x, & x\geqslant 0\text{ 且 }y<-1,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

显然，f 在 D 上一致连续，然而 f 并不满足条件(1)．

7. 对于一元函数 $y=f(x)$，广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ 未必收敛．对于二元函数 $z=f(x,y)$，广义积分

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ 收敛当且仅当 $\iint\limits_D |f(x,y)|dxdy$ 收敛(参看[99]),即广义二重积分是一种绝对收敛积分.

8. 对于一元函数 $y=f(x)$,它在区间$[a,b]$上的弧长定义为内接折线长度之和的极限,即任给分划

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

作和数

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2},$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|$,则弧长定义为

$$S=\lim_{\lambda\to 0}S(T).$$

对于二元函数 $z=f(x,y)$,它所代表的曲面的面积不能仿照定义曲线弧长的方式来进行. 有关的例子可参看文献[172].

§5.6 多元函数的极值

5.6.1 多元函数极值的一阶微分判别法

在通常的数学分析教材中,都没有讨论用一阶偏导数来研究多元函数极值的方法. 下面,我们来介绍一个多元函数极值的一阶微分判别法.

定理 1 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在以点 P_0 为中心的某个邻域 D 内连续,且在 $D\backslash\{P_0\}$内可微,那么

(i) 如果当 $P\in D\backslash\{P_0\}$时,有$(P-P_0)\cdot\nabla f(P)<0$,则 f 在点 P_0 处有一个极大值;

(ii) 如果当 $P\in D\backslash\{P_0\}$时,有$(P-P_0)\cdot\nabla f(P)>0$,则 f 在点 P_0 处有一个极小值,

其中$\nabla f(P)$为 f 在 P 点处的梯度,$\cdot$为数积.

证 我们只证(i),(ii)的证明类似.

设当 $P\in D\backslash\{P_0\}$时,有$(P-P_0)\cdot\nabla f(P)<0$. 现定义从闭区

间[0,1]到 $\mathbf{R}$ 的一元实函数 F 如下：

$$F(t) = f(P_0 + t(P - P_0)), \quad t \in [0,1].$$

显然，F 在闭区间[0,1]上连续，在开区间(0,1)内可微，且

$$F'(t) = (P - P_0) \cdot \nabla f(P_0 + t(P - P_0)).$$

根据微分中值定理，存在点 $t_0 \in (0,1)$，使得

$$F(1) - F(0) = F'(t_0),$$

即

$$\begin{aligned} f(P) - f(P_0) &= (P - P_0) \cdot \nabla f(P_0 + t_0(P - P_0)) \\ &= \frac{1}{t_0}[t_0(P - P_0)] \cdot \nabla f(P_0 + t_0(P - P_0)). \end{aligned}$$

设 r 是 D 的半径，令 $Q = P_0 + t_0(P - P_0)$，则

$$0 < \| Q - P_0 \| = t_0 \| P - P_0 \| < \| P - P_0 \| < r,$$

即 $Q \in D \backslash \{P_0\}$，故由条件知

$$(Q - P_0) \cdot \nabla f(Q) < 0.$$

又由于 $Q - P_0 = t_0(P - P_0)$，所以

$$f(P) - f(P_0) = \frac{1}{t_0}(Q - P_0) \cdot \nabla f(Q) < 0.$$

因此不等式 $f(P) < f(P_0)$ 对一切 $P \in D \backslash \{P_0\}$ 成立，这就是说 f 在点 P_0 处有一个极大值.

例 1 求函数

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 10y + 9$$

的极值.

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 2$，$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 6y + 10$，令 $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$，得 $x = 1, y = -2$，即得 f 的驻点为 $P_0(1,-2)$. 现用定理 1 所提供的方法检验 f 在驻点 P_0 处是否有极值. 由于

$$\begin{aligned} (P - P_0) \cdot \nabla f(P) &= (x - 1, y + 2) \cdot \nabla f(x,y) \\ &= (x - 1, y + 2)(2x + 2y + 2, 2x + 6y + 10) \\ &= 2(x - 1)(x + y + 1) + 2(y + 2)(x + 3y + 5), \end{aligned}$$

因而若令 $u = x - 1, v = y + 2$，则当 $(u,v) \neq (0,0)$ 时，上式就可化为标准二次型的形式：

$$2(u^2+2uv+3v^2)=2((u+v)^2+2v^2)>0.$$

于是对任意 $P(x,y)\neq P_0(1,-2)$，都有

$$(P-P_0)\cdot\nabla f(P)>0,$$

由定理 1 即知 f 在 $P_0(1,-2)$ 点取极小值 $f(1,-2)=0$.

定理 2 设函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在以点 P_0 为中心的某个邻域 D 内有连续的二阶偏导数，且 P_0 是 f 的一个驻点，那么

(i) 如果对任意的单位向量 α，都有 $(\alpha\cdot\nabla)^2f(P_0)>0$，则 f 在点 P_0 有一个极小值；

(ii) 如果对任意的单位向量 α，都有 $(\alpha\cdot\nabla)^2f(P_0)<0$，则 f 在点 P_0 有一个极大值；

(iii) 如果对任意的单位向量 α，$(\alpha\cdot\nabla)^2f(P_0)$ 是可变号的，则 P_0 是 f 的一个鞍点，

其中 $(\alpha\cdot\nabla)^2f(P_0)=\sum\limits_{i,j}\alpha_i\alpha_j\dfrac{\partial^2f(P_0)}{\partial x_i\partial x_j}$，而 α_i 是 α 的第 i 个分量.

关于定理 2 的证明，可参看文献[108].

在二元函数的情况下，定理 2 的条件可改写如下：

(i) 若 $f''_{xx}(P_0)>0$，$f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)-(f''_{xy}(P_0))^2>0$，则 f 在点 P_0 取极小值；

(ii) 若 $f''_{xx}(P_0)<0$，$f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)-(f''_{xy}(P_0))^2>0$，则 f 在点 P_0 取极大值；

(iii) 若 $f''_{xx}(P_0)f''_{yy}(P_0)-(f''_{xy}(P_0))^2<0$，则 P_0 是 f 的鞍点.

不难证明，如果用定理 2 将一个驻点判别为极大值点或极小值点，那么一定能用定理 1 判别出来. 另一方面，容易给出定理 2 失效而定理 1 有效的函数的例子. 例如

$$g(x,y)=1-x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{4}{5}}$$

和

$$h(x,y)=25+(x-y)^4+(x-1)^4.$$

注 1 本节的材料来源于文献[108].

5.6.2 关于最大(小)值的一个例子

我们知道,若一元函数 f 在区间 I 上可微,又在 I 的内部有唯一的驻点 x_0,那么,如果 x_0 是 f 的极大(小)值点,则 x_0 就是 f 在 I 上的最大(小)值点.

于是,人们可能会猜测:如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上可微,又在 D 内只有一个驻点 $P_0(x_0,y_0)$,而且这驻点是 f 的极大(小)值点,那么 $P_0(x_0,y_0)$ 也一定是 f 在 D 上的最大(小)值点.但这种猜测是不对的,反例如下:

例 2 令 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 4,-1\leqslant y\leqslant 1\}$. 在 D 上定义函数 f:

$$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2,$$

研究 f 在 D 上的最大值.

解

$$f'_x(x,y)=3x^2-8x+2y,$$

$$f'_y(x,y)=2x-2y.$$

解方程组 $f'_x(x,y)=0$, $f'_y(x,y)=0$,得两组解(0,0),(2,2). 但(2,2)不在 D 内,故 D 内只有一个驻点(0,0).

其次,$f''_{xx}(x,y)=6x-8$, $f''_{xy}(x,y)=2$, $f''_{yy}(x,y)=-2$. 于是

$$f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0)-(f''_{xy}(0,0))^2=16-4>0.$$

故知(0,0)确是函数 f 在 D 内的极大值点,在这一点上有极大值 $f(0,0)=0$. 然而 0 并不是 f 在 D 上的最大值,最大值出现在边界点(4,1)上,$f(4,1)=7$.

这个函数在全平面上有两个驻点,只是在 D 内有一个驻点.于是自然会问:是否存在二元可微函数,它在全平面上只有一个驻点,而且这驻点又是极大值点,但这一点并不是最大值点?这种函数的确是存在的.

例 3 设

$$f(x,y)=8(\operatorname{arctg}x)^3-8(\operatorname{arctg}x)^2$$

$$+ (\mathrm{arctg}x)(\mathrm{arctg}y) - (\mathrm{arctg}y)^2/8 .$$

研究函数 f 在全平面上的最大值.

解 显然,f 是初等函数,且它在全平面上可微. 解方程组

$$f'_x(x,y) = 24(\mathrm{arctg}x)^2/(1+x^2)$$
$$- 16(\mathrm{arctg}x)/(1+x^2) + \mathrm{arctg}y/(1+x^2) = 0 , \quad (1)$$
$$f'_y(x,y) = \mathrm{arctg}x/(1+y^2) - \mathrm{arctg}y/4(1+y^2) = 0 . \quad (2)$$

由(2),得 $\mathrm{arctg}y = 4\mathrm{arctg}x$. 代入(1)后消去 $1/(1+x^2)$,得 $\mathrm{arctg}x \cdot (2\mathrm{arctg}x - 1) = 0$. 由 $\mathrm{arctg}x = 0$ 得驻点(0,0). 又将 $\mathrm{arctg}x = 1/2$ 代入 $\mathrm{arctg}y = 4\mathrm{arctg}x$,得 $\mathrm{arctg}y = 2$,无解. 这是因为

$$-\pi/2 < \mathrm{arctg}y < \pi/2 .$$

因此,函数 f 在全平面上只有一个驻点(0,0). 为了判断它是不是极值点,求二阶偏导数:

$$f''_{xx}(x,y) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}[24(\mathrm{arctg}x)^2 - 16\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}y] + \frac{1}{1+x^2}\left[48(\mathrm{arctg}x)\frac{1}{1+x^2} - \frac{16}{1+x^2}\right],$$

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2} ,$$

$$f''_{yy}(x,y) = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}\left(\mathrm{arctg}x - \frac{1}{4}\mathrm{arctg}y\right) + \frac{1}{1+y^2}\left[-\frac{1}{4(1+y^2)}\right].$$

由此得到

$$f''_{xx}(0,0)f''_{yy}(0,0) - (f''_{xy}(0,0))^2 = 3 > 0 .$$

又,$f''_{xx}(0,0) = -16 < 0$,可知(0,0)是 f 的极大值点,$f(0,0) = 0$ 是极大值. 这并不是 f 的最大值,例如,$f(\mathrm{tg}1, \mathrm{tg}1) = 7/8 > 0$. 其实,这个函数的最大值是不存在的.

注 2 本小节的材料来源于文献[82].

5.6.3 最大、最小值的极限形式及其应用

多元连续函数的最大值与最小值的求法,通常是在函数的一

阶偏导数甚至二阶偏导数存在且连续的条件下进行的．这里，我们向读者介绍在更一般的情况下(函数的偏导数可能不存在)，多元连续函数最大值与最小值的一种求法(即它的极限形式)．

定理 3 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D(D 的面积不为零)上的连续函数，则

(i) 当 $f(x,y)\geqslant 0$ 时，有

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\iint_D f^n(x,y)dxdy};$$

(ii) 当 $f(x,y)>0$ 时，有

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\iint\limits_D \frac{1}{f^n(x,y)}dxdy}}.$$

证 (i) 由已知条件，$f(x,y)$ 在 D 上的最大值 M 是存在的，不妨假设 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 取到最大值 M，即

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = f(x_0,y_0) = M.$$

显然，$M\geqslant 0$．若 $M=0$，则 $f(x,y)\equiv 0$，从而定理 3(i)成立．下面就 $M>0$ 的情形进行证明．

若 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点，则对任意 $\varepsilon>0$ (不妨设 $0<\varepsilon<M$)，由 f 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的连续性知存在 $\delta>0$，当 $(x,y)\in U_\delta(P_0)\subset D$ 时，有

$$M-\varepsilon/2\leqslant f(x,y)\leqslant M,$$

这里 $U_\delta(P_0)$ 代表点 P_0 的 δ 邻域．于是

$$(M-\varepsilon/2)^n\leqslant f^n(x,y)\leqslant M^n,$$

从而

$$\iint_D f^n(x,y)dxdy \geqslant \iint_{U_\delta(P_0)} f^n(x,y)dxdy$$

$$\geqslant \iint_{U_\delta(P_0)} (M-\varepsilon/2)^n dxdy = \pi\delta^2(M-\varepsilon/2)^n.$$

另一方面，我们有

$$\iint_D f^n(x,y)dxdy \leqslant |D|M^n,$$

式中$|D|$代表区域D的面积．因此

$$(\pi\delta^2)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon/2) \leqslant \left[\iint_D f^n(x,y)dxdy\right]^{\frac{1}{n}} \leqslant |D|^{\frac{1}{n}}M .$$

当$n\to\infty$时，有$(\pi\delta^2)^{\frac{1}{n}}\to 1$，$|D|^{\frac{1}{n}}\to 1$，从而存在自然数$N$，当$n>N$时，有

$$M-\varepsilon \leqslant \left[\iint_D f^n(x,y)dxdy\right]^{\frac{1}{n}} < M+\varepsilon ,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\iint_D f^n(x,y)dxdy} = M .$$

若$P_0(x_0,y_0)$是D的边界点，则用$U_\delta(P_0)\cap D$代替上述的$U_\delta(P_0)$，定理3(i)即可得证．

(ii) $$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\iint\limits_D \frac{1}{f^n(x,y)}dxdy}} = \frac{1}{\max\limits_{(x,y)\in D}\frac{1}{f(x,y)}}$$

$$= \min_{(x,y)\in D} f(x,y) .$$

推论1 设$f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数，则

(i) 当$f(x)\geqslant 0$时，有

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx} ;$$

(ii) 当$f(x)>0$时，有

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b \frac{1}{f^n(x)}dx}} .$$

证 (i) 令$F(x,y)=f(x)$，$(x,y)\in D=[a,b]\times[a,b]$，则

$$\max_{x\in[a,b]} f(x) = \max_{(x,y)\in D} F(x,y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\iint_D F^n(x,y)dxdy}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b dy \int_a^b f^n(x)dx}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}\ .$$

(ii) 仿(i)可证.

例 4 求函数 $f(x,y)=2-2x-y+xy$ 在 $D=[0,1]\times[1,2]$ 上的最大值.

解
$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \lim_{n\to\infty}\left[\iint_D (2-2x-y+xy)^n dxdy\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 (1-x)^n dx \int_0^2 (2-y)^n dy\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+n)^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{1}{(1+n)^{\frac{1}{n}}} = 1\ .$$

值得注意的是,在某些情况下,利用前述结论,也可对求数列极限提供简捷的途径.

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu n+1}$, $\mu>0$.

解 在推论 1 中,令 $f(x)=x^\mu, x\in[0,1]$,则

$$\max_{x\in[0,1]} x^\mu = \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 (x^\mu)^n dx\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu n+1}}\ .$$

而 $\max\limits_{x\in[0,1]} x^\mu = 1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mu n+1}=1$.

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{e^{2n}-1}{n}}$.

解 因 $\int_0^2 (e^x)^n dx = \dfrac{e^{2n}-1}{n}$,故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{2n}-1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^2 (e^x)^n dx}$$

$$= \max_{x\in[0,2]} e^x = e^2.$$

注 3 本小节的材料来源于文献[74].

§5.7 多元凸函数

在通常的数学分析教材中对一元凸函数都有比较详细的介绍，而对多元凸函数却论述甚少．在这一节中，我们将讨论在实际问题中具有重要应用的多元凸函数．不失一般性，我们仅讨论三元凸函数．

5.7.1 凸函数的连续性

设 D 是三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的开凸集，f 是 D 上的三元函数．如果对任意的点 $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in D$ 及任意的实数 $\lambda\in[0,1]$，都有

$$f(\lambda(x_1,y_1,z_1)+(1-\lambda)(x_2,y_2,z_2))$$
$$\leqslant \lambda f(x_1,y_1,z_1)+(1-\lambda)f(x_2,y_2,z_2),$$

则称 f 是 D 上的下凸函数，简称凸函数．

不难验证，f 是 D 上的凸函数意味着对任意的自然数 n，任意的点 $(x_i,y_i,z_i)\in D$ 及实数 $\lambda_i\in[0,+\infty)$ $(i=1,2,\cdots,n)$，当 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i,y_i,z_i)\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i,y_i,z_i).$$

注意到 $\mathbb{R}^3$ 中的长方体是含有它的八个顶点的最小凸集，故得下述引理：

引理 1 设 A 是 $\mathbb{R}^3$ 中以 $M_1,M_2,\cdots,M_8$ 为顶点的长方体，则

$$A=\left\{\sum_{i=1}^{8}\lambda_i M_i\,\middle|\,\lambda_i\geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{8}\lambda_i=1\right\}.$$

定理 1 设 f 是 $\mathbb{R}^3$ 的开凸集 D 上的凸函数，则 f 在 D 上连续.

证 任取点$(x_0,y_0,z_0)\in D$,不妨设$f(x_0,y_0,z_0)=0$(否则,考虑函数$f_1(x,y,z)=f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)$即可). 因$D$是开集,故存在$\delta>0$,使得以原点(0,0,0)为心,$\delta$为边长的正方体$A$满足:$(x_0,y_0,z_0)+A\subset D$. 显然,$(x_0,y_0,z_0)+A$是以$(x_0,y_0,z_0)$为心的正方体,设其八个顶点为$M_1,M_2,\cdots,M_8$,由引理1知对任意的点$(x,y,z)\in(x_0,y_0,z_0)+A$,存在$\lambda_i\geqslant 0$,$\sum_{i=1}^{8}\lambda_i=1$,使得

$$(x,y,z)=\sum_{i=1}^{8}\lambda_i M_i.$$

因f是凸函数,故

$$f(x,y,z)\leqslant\sum_{i=1}^{8}\lambda_i f(M_i)\leqslant K\ ,$$

其中$K=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 8}f(M_i)$. 下面我们说明$f$在$(x_0,y_0,z_0)$点连续. 为此,只要证明对任意的$\varepsilon>0$,存在点$(x_0,y_0,z_0)$的一个邻域$U$,使得当$(x,y,z)\in U$时,就有

$$|f(x,y,z)|<K\varepsilon\ .$$

对任意的$\varepsilon\in(0,1)$,我们取(x_0,y_0,z_0)的邻域U:

$$U=(x_0,y_0,z_0)+\varepsilon A\ .$$

于是,对任意的$(x,y,z)\in U$,存在$M\in\varepsilon A$,使得

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+M\ .$$

由于A关于原点对称,因而$\pm\frac{1}{\varepsilon}M\in A$,所以

$$(x_0,y_0,z_0)\pm\frac{1}{\varepsilon}M\in(x_0,y_0,z_0)+A\subset D\ .$$

因f是D上的凸函数,且

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(x_0,y_0,z_0)+M\\&=(1-\varepsilon)(x_0,y_0,z_0)+\varepsilon\left((x_0,y_0,z_0)+\frac{1}{\varepsilon}M\right)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x_0,y_0,z_0)&=\frac{1}{1+\varepsilon}\left((x_0,y_0,z_0)+M\right)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left((x_0,y_0,z_0)-\frac{1}{\varepsilon}M\right)\\&=\frac{1}{1+\varepsilon}(x,y,z)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left((x_0,y_0,z_0)-\frac{1}{\varepsilon}M\right)\ ,\end{aligned}$$

故得

$$f(x,y,z)\leqslant(1-\varepsilon)f(x_0,y_0,z_0)+\varepsilon f((x_0,y_0,z_0)+\frac{1}{\varepsilon}M)\leqslant K\varepsilon\ ,\tag{1}$$

$$\begin{aligned}0=f(x_0,y_0,z_0)&\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}f(x,y,z)\\&\quad+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}f((x_0,y_0,z_0)-\frac{1}{\varepsilon}M)\\&\leqslant\frac{1}{1+\varepsilon}f(x,y,z)+\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}K\ .\end{aligned}\tag{2}$$

由(1),(2)得

$$-K\varepsilon\leqslant f(x,y,z)\leqslant K\varepsilon\ ,$$

即$|f(x,y,z)|\leqslant K\varepsilon$.

定理2 设f是$\mathbb{R}^3$的开凸集D上的凸函数,则f在D的每一有界闭子集上是Lipschitz函数.

证 设S是D的一个有界闭子集,则S是紧集.因此,存在$\varepsilon>0$,使$S+\varepsilon B\subset D$,其中B为$\mathbb{R}^3$的闭单位球,而$S+\varepsilon B$仍为紧集.由定理1可知,f在紧集$S+\varepsilon B$上连续从而有界,记L_1和L_2分别为f在$S+\varepsilon B$上的下界和上界.

对任意的点$M_1,M_2\in S$,记$d(M_1,M_2)$为M_1与M_2之间的距离,并令

$$M=M_2+\varepsilon(M_2-M_1)/d(M_1,M_2),\ M_1\neq M_2,$$

则$M\in S+\varepsilon B$,并且$M_2=(1-\lambda)M_1+\lambda M$,其中$\lambda=d(M_1,M_2)/(\varepsilon+d(M_1,M_2))$,所以

$$\begin{aligned}f(M_2)&\leqslant(1-\lambda)f(M_1)+\lambda f(M)\\&=f(M_1)+\lambda(f(M)-f(M_1))\ ,\end{aligned}$$

从而 $f(M_2)-f(M_1)\leqslant\lambda(L_2-L_1)\leqslant\frac{L_2-L_1}{\varepsilon}d(M_1,M_2)$.

同理可得

$$f(M_1)-f(M_2)\leqslant\frac{L_2-L_1}{\varepsilon}d(M_1,M_2).$$

因此　　$|f(M_2)-f(M_1)|\leqslant\frac{L_2-L_1}{\varepsilon}d(M_1,M_2)$,

即 f 在 S 上是 Lipschitz 函数.

5.7.2　凸函数的可微性

引理 2　若 g 是开区间 (a,b) 上的凸函数,则 $\frac{g(s)-g(t)}{s-t}$ $(s\neq t)$ 关于 s 和 t 都是单增函数.

引理 2 可由凸函数的定义直接推出,其证明留给读者.

由引理 2 可知,对任意的 $t_0\in(a,b)$,g 在 t_0 点的右导数

$$g'_+(t_0)=\lim_{t\to0^+}\frac{g(t_0+t)-g(t_0)}{t}$$

总是存在的. 设 $D\subset\mathbb{R}^3$ 是开凸集,$M\in D$,f 是 D 上的凸函数,对 $\mathbb{R}^3$ 中的任一方向 h,存在 $\delta>0$,使当 $t\in(-\delta,\delta)$ 时就有

$$M+th\in D.$$

令 $g(t)=f(M+th)$,$t\in(-\delta,\delta)$. 易知,g 是 $(-\delta,\delta)$ 上的凸函数. $g'_+(0)$ 称为 f 在 M 点沿 h 的方向导数,记为 $D^+f(M)(h)$,即

$$D^+f(M)(h)=\lim_{t\to0}\frac{f(M+th)-f(M)}{t}.$$

$D^+f(M)(h)$ 总是存在的,也就是说,凸函数沿每一方向都是可导的.

对于一般的多元函数,当它在某一点的偏导数都存在时,该函数在这一点并不一定可微. 然而,对于多元凸函数,我们有

定理 3　设 f 是 $\mathbb{R}^3$ 中开凸集 D 上的凸函数,$(x_0,y_0,z_0)\in D$. 若 f 在 (x_0,y_0,z_0) 点的三个偏导数都存在,则 f 在 (x_0,y_0,z_0) 点可微.

证　记 $F_1=f'_x(x_0,y_0,z_0)$,$F_2=f'_y(x_0,y_0,z_0)$,$F_3=f'_z(x_0,y_0,z_0)$,并令

$$\varphi(h,k,j)=f(x_0+h,y_0+k,z_0+j)-f(x_0,y_0,z_0)-(hF_1+kF_2+jF_3)$$

则 f 在 (x_0,y_0,z_0) 点可微等价于

$$\frac{\varphi(h,k,j)}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}} \to 0 \ (h \to 0, k \to 0, j \to 0). \tag{3}$$

下面，我们证明(3)式成立．事实上，由于 f 是凸函数，因而 $\varphi(h,k,j)$ 也显然是凸函数．于是

$$\varphi(h,k,j) = \varphi\left(\frac{1}{3}(3h,0,0) + \frac{1}{3}(0,3k,0) + \frac{1}{3}(0,0,3j)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{3}[\varphi(3h,0,0) + \varphi(0,3k,0) + \varphi(0,0,3j)],$$

从而

$$\frac{\varphi(h,k,j)}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}$$

$$\leqslant \frac{\varphi(3h,0,0) + \varphi(0,3k,0) + \varphi(0,0,3j)}{3\sqrt{h^2+k^2+j^2}}. \tag{4}$$

以 $-h,-k$ 及 $-j$ 分别代替(2)中的 h,k 及 j，得

$$\frac{\varphi(-h,-k,-j)}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}$$

$$\leqslant \frac{\varphi(-3h,0,0) + \varphi(0,-3k,0) + \varphi(0,0,-3j)}{3\sqrt{h^2+k^2+j^2}}. \tag{5}$$

因为

$$0 = \varphi(0,0,0) = \varphi\left(\frac{1}{2}(-h,-k,-j) + \frac{1}{2}(h,k,j)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\varphi(-h,-k,-j) + \frac{1}{2}\varphi(h,k,j),$$

所以

$$\varphi(h,k,j) \geqslant -\varphi(-h,-k,-j). \tag{6}$$

由(4)，(5)与(6)，得到

$$-\frac{\varphi(-3h,0,0) + \varphi(0,-3k,0) + \varphi(0,0,-3j)}{3\sqrt{h^2+k^2+j^2}}$$

$$\leqslant \frac{\varphi(h,k,j)}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}} \leqslant \frac{\varphi(3h,0,0) + \varphi(0,3k,0) + \varphi(0,0,3j)}{3\sqrt{h^2+k^2+j^2}}. \tag{7}$$

因为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\varphi(3h,0,0)}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+3h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)-3hF_1}{3h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+3h,y_0,z_0)-f(x_0,y_0,z_0)}{3h}-F_1\right)$$

$$=0,$$

由此易知

$$\frac{\varphi(3h,0,0)}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\to 0\quad(h\to 0,k\to 0,j\to 0).$$

类似地可得

$$\frac{\varphi(0,3k,0)}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\to 0,\quad\frac{\varphi(0,0,3j)}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\to 0\quad(h\to 0,k\to 0,j\to 0).$$

因此得到

$$\frac{\varphi(3h,0,0)+\varphi(0,3k,0)+\varphi(0,0,3j)}{3\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\to 0$$

$$(h\to 0,k\to 0,j\to 0).\tag{8}$$

以$-h,-k$及$-j$分别代替(8)中的h,k及j,就得到

$$\frac{\varphi(-3h,0,0)+\varphi(0,-3k,0)+\varphi(0,0,-3j)}{3\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\to 0$$

$$(h\to 0,k\to 0,j\to 0).\tag{9}$$

由(7),(8)和(9)式可得

$$\frac{\varphi(h,k,j)}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}\to 0\quad(h\to 0,k\to 0,j\to 0),$$

故函数f在(x_0,y_0,z_0)点可微.

5.7.3 凸函数序列

定理 4 设D是$\mathbb{R}^n$中的开凸集,$\{f_n\}$是D上的一列凸函数.若对每一点$M\in D$,数列$\{f_n(M)\}$有界,则$\{f_n\}$在D的每一有界闭子集上一致有界,并且$\{f_n\}$在D的每一有界闭子集上是一致Lipschitz的(即对任一有界闭集$S\subset D$,存在常数L,使得对任意的点$M_1,M_2\in S$及任意的自然数n,都有

$$|f_n(M_1) - f_n(M_2)| \leqslant Ld(M_1, M_2) .$$

证 令 $f(M) = \sup\limits_{1\leqslant n<+\infty} f_n(M), M\in D$. 容易验证，$f$ 也是 D 上的凸函数. 据定理 1，f 在 D 上连续，所以它在 D 的每一有界闭子集上有界，从而 $\{f_n\}$ 在其上一致有上界. 取 $M_0\in D$ 及正数 $\varepsilon>0$，使 $M_0+\varepsilon B\subset D$，其中 B 为 $\mathbb{R}^3$ 的闭单位球. 记

$$L_1 = \inf\{f_n(M_0) \mid 1\leqslant n<+\infty\},$$

$$L_2 = \sup\{f_n(M) \mid M\in M_0+\varepsilon B,\ 1\leqslant n<+\infty\},$$

则 $-\infty<L_1\leqslant L_2<+\infty$. 对任意的 $M\in D, M\neq M_0$. 记

$$M_1 = M_0 + \frac{\varepsilon}{d(M_0, M)}(M_0 - M) ,$$

则 $M_1\in M_0+\varepsilon B\subset D$，并且

$$M_0 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + d(M_0, M)}M + \frac{d(M_0, M)}{\varepsilon + d(M_0, M)}M_1.$$

于是，我们就得到

$$L_1 \leqslant f_n(M_0) \leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon + d(M_0, M)}f_n(M) + \frac{d(M_0, M)}{\varepsilon + d(M_0, M)}f_n(M_1)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon + d(M_0, M)}f_n(M) + L_2,\ n = 1, 2, \cdots ,$$

所以 $f_n(M)\geqslant \frac{L_1 - L_2}{\varepsilon}(\varepsilon + d(M_0, M))$. 由此易知 $\{f_n\}$ 在 D 的每一有界闭子集上一致有下界.

综上即得 $\{f_n\}$ 在 D 的每一有界闭子集上一致有界. 由定理 2 的证明可知，$\{f_n\}$ 在 D 的每一有界闭子集上是一致 Lipschitz 的.

定理 5 设 $\{f_n\}$ 是开凸集 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上的一列凸函数. 若 $\{f_n\}$ 在 D 的每一点上都收敛，则 $\{f_n\}$ 在 D 的每一有界闭子集上一致收敛.

证 令 $f(M) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(M), M\in D$. 易知 f 是 D 上的凸函数. 对任意的有界闭集 $S\subset D$，由定理 2 和定理 4 知，f 在 S 上是 Lipschitz 的，且 $\{f_n\}$ 在 S 上是一致 Lipschitz 的. 因此，存在常数 L，使对任意的点 $M_1, M_2\in S$，都有

$$|f(M_1) - f(M_2)| \leqslant Ld(M_1, M_2) ,$$

$$|f_n(M_1) - f_n(M_2)| \leqslant Ld(M_1, M_2), \quad n = 1, 2, \cdots$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，记 $\mathscr{A} = \{U_\varepsilon(M) \mid M \in S\}$，其中

$$V_\varepsilon(M) = \{M' \in \mathbb{R}^3 \mid d(M, M') < \varepsilon/3L\},$$

则 $\mathscr{A}$ 是 S 的一个开覆盖．由有限覆盖定理，存在 S 的有限子集 S_0，使得 $\bigcup_{Z \in S_0} U_\varepsilon(Z) \supset S$．由定理 5 的条件知，存在自然数 N，当 $n \geqslant N$ 时，对每一 $Z \in S_0$，都有

$$|f_n(Z) - f(Z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对任意的 $M \in S$，必有 $Z \in S_0$，使得 $M \in U_\varepsilon(Z)$．因此

$$|f_n(M) - f_n(Z)| \leqslant Ld(M, Z) < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|f(M) - f(Z)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是，当 $n \geqslant N$ 时，对一切 $M \in S$，有

$$\begin{aligned} |f_n(M) - f(M)| &\leqslant |f_n(M) - f_n(Z)| \\ &+ |f_n(Z) - f(Z)| + |f(Z) - f(M)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

故 $\{f_n\}$ 在 S 上一致收敛．

定理 6 设 $\{f_n\}$ 是开凸集 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上的一列凸函数．若 $\{f_n\}$ 在 D 的每一点都收敛于函数 f，则对任意的 $M \in D$ 及 $h \in \mathbb{R}^3$，都有

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} d^+ f_n(M)(h) \leqslant d^+ f(M)(h).$$

证 对任意实数 $\lambda > d^+ f(M)(h)$，存在 $t_0 > 0$，使

$$\frac{f(M + t_0 h) - f(M)}{t_0} < \lambda.$$

由定理 6 的条件可知，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_n(M + t_0 h) - f_n(M)}{t_0} = \frac{f(M + t_0 h) - f(M)}{t_0} < \lambda.$$

因此，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，有

$$\frac{f_n(M + t_0 h) - f_n(M)}{t_0} < \lambda.$$

由引理 2 可得

$$d^+ f_n(M)(h) \leqslant \frac{f_n(M + t_0 h) - f_n(M)}{t_0} < \lambda ,$$

所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} d^+ f_n(M)(h) \leqslant \lambda$，从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} d^+ f_n(M)(h) \leqslant d^+ f(M)(h) .$$

5.7.4 凸函数项级数

定理 7 设 $\{f_n\}$ 是开凸集 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上的一列凸函数．若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 D 上处处收敛于函数 f，则对任意的 $M \in D$ 及 $h \in \mathbb{R}^3$，都有

$$\sum_{n=1}^{\infty} d^+ f_n(M)(h) = d^+ f(M)(h) ,$$

并且对 D 的任一有界闭子集 S，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^+ f_n(M)(h)$ 关于 $M \in S$ 及 $h \in B$（B 为 $\mathbb{R}^3$ 的闭单位球）一致收敛．

证 对任意的有界闭集 $S \subset D$，由 D 是开集可知，存在 $\delta > 0$ 使得 $S + \delta B \subset D$. 显然，$S + \delta B$ 仍是有界闭集．由定理 5，函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ 在 $S + \delta B$ 上一致收敛于函数 f，所以对任意的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n, m > N$ 时，对一切 $M' \in S + \delta B$，都有

$$\left| \sum_{i=n}^{m} f_i(M') \right| < \frac{\delta}{2} \varepsilon .$$

因对任意的 $M \in S$ 及 $h \in B$，有 $M \pm \delta h \in S + \delta B$，故当 $n, m > N$ 时．就有

$$\left| \sum_{i=n}^{m} \frac{f_i(M \pm \delta h) - f_i(M)}{\pm \delta} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta} \left(\left| \sum_{i=n}^{m} f_i(M \pm \delta h) \right| + \left| \sum_{i=n}^{m} f_i(M) \right| \right) < \varepsilon .$$

于是，对任意的 $M \in S$ 及 $h \in B$，当 $n, m > N$ 时，有

$$-\varepsilon < \sum_{i=n}^{m} \frac{f_i(M - \delta h) - f_i(M)}{-\delta} ,$$

$$\sum_{i=n}^{m}\frac{f_i(M+\delta h)-f_i(M)}{\delta}<\varepsilon. \tag{10}$$

由引理 2，$\frac{f_i(M+th)-f_i(M)}{t}$ $(t\neq 0)$在开区间$(-\delta,\delta)$上是关于 t 的单调增加函数，所以对 $t\in(0,\delta)$，有

$$\frac{f_i(M-\delta h)-f_i(M)}{-\delta}\leqslant\frac{f_i(M+th)-f_i(M)}{t}\leqslant\frac{f_i(M+\delta h)-f_i(M)}{\delta}.$$

由上式及(10)式可知，对任意的 $M\in S$，任意的 $h\in B$ 及 $t\in(0,\delta)$，当 $n,m>N$ 时，都有

$$\left|\sum_{i=n}^{m}\frac{f_i(M+th)-f_i(M)}{t}\right|<\varepsilon. \tag{11}$$

在(11)中令 $t\to 0^+$，即得

$$\left|\sum_{i=n}^{m}d^+ f_i(M)(h)\right|\leqslant\varepsilon.$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}d^+ f_n(M)(h)$ 关于 $M\in S$ 及 $h\in B$ 一致收敛.

由(11)及 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 在 D 上处处收敛于 f 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(M+th)-f_n(M)}{t}=\frac{f(M+th)-f(M)}{t}$$

在$(0,\delta)$上一致收敛. 令 $t\to 0^+$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}d^+ f_n(M)(h)=d^+ f(M)(h).$$

推论 1 设$\{f_n\}$是开凸集 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上的一列凸函数，且 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ 在 D 上处处收敛于 f. 若 f 在点 $M_0\in D$ 处可微，则每个 f_n 在点 M_0 处也可微.

证 设 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$，记 $h_1=(1,0,0)$，$h_2=(0,1,0)$，$h_3=(0,0,1)$. 对 D 上任一凸函数 g，由于

$$\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}=\lim_{t\to 0}\frac{g(x_0+t,y_0,z_0)-g(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{g(M_0 + th_1) - g(M_0)}{t}$$

存在的充要条件是

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{g(M_0+th_1)-g(M_0)}{t} = \lim_{t\to 0^-} \frac{g(M_0+th_1)-g(M_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} -\frac{g(M_0+t(-h_1))-g(M_0)}{t},$$

即$\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial x}$存在的充要条件是

$$d^+ g(M_0)(h_1) = -d^+ g(M_0)(-h_1).$$

类似地，$\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial y}$与$\frac{\partial g(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}$存在的充要条件分别是

$$d^+ g(M_0)(h_2) = -d^+ g(M_0)(-h_2)$$

与

$$d^+ g(M_0)(h_3) = -d^+ g(M_0)(-h_3).$$

由 f 在 M_0 点可微知，f 在 M_0 点的三个偏导数都存在，所以

$$d^+ f(M_0)(h_i) = -d^+ f(M_0)(-h_i),\ i = 1,2,3. \quad (12)$$

由定理 7，得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} d^+ f_n(M_0)(\pm h_i) = d^+ f(M_0)(\pm h_i),\ i = 1,2,3.$$

再由(12)可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (d^+ f_n(M_0)(h_i) + d^+ f_n(M_0)(-h_i)) = 0,\ i = 1,2,3. \quad (13)$$

由

$$d^+ f_n(M_0)(h_i) + d^+ f_n(M_0)(-h_i)$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{f_n(M_0 + th_i) - f_n(M_0)}{t} + \frac{f_n(M_0 + t(-h_i)) - f_n(M_0)}{t}\right]$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{f_n(M_0 + th_i) - f_n(M_0)}{t} - \frac{f_n(M_0 - th_i) - f_n(M_0)}{-t}\right]$$

及引理 2 可知，

$$d^+ f_n(M_0)(h_i) + d^+ f_n(M_0)(-h_i) \geqslant 0,\ i = 1,2,3.$$

由此及(13)可得

$$d^+ f_n(M_0)(h_i) + d^+ f_n(M_0)(-h_i) = 0\ ,\ i = 1,2,3,$$

故 f_n 在 M_0 的三个偏导数都存在. 据定理 3 即得 f_n 在 M_0 点可微.

5.7.5 评注

凸函数在数学和应用数学的诸多分支中都有重要应用. 这一节在微积分的范畴内对多元凸函数作了深入的讨论. 关于凸函数是连续的 Lipschitz 函数的定理 1 与定理 2 在几十年前就为人所知(参看[167]p. 83,推论 10.1.1 及 p. 86,定理 10.4). 涉及多元凸函数可微性的定理 3 是新的,而关于凸函数列的两个深刻结果定理 4 和定理 5 则是鲜为人知的两个已知结果(参看[167]p. 88,定理 10.6 和 p. 90,定理 10.8). 定理 7 及推论 1 是我们自己首次得到的.

§5.8 多元函数的次微分

5.8.1 定义与性质

定义 1 设 $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ $(x=(x_1,\cdots,x_n))$是$\mathbb{R}^n$ 上的 n 元函数. 若存在 n 个常数 $a_1,\cdots,a_n$,使得

$$f(x+h)-f(x)=f(x_1+h_1,\cdots,x_n+h_n)-f(x_1,\cdots,x_n)$$

$$=a_1h_1+\cdots+a_nh_n+o(\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2})\ , \quad (1)$$

则称 f 在 x 点可微,并称关于 $h=(h_1,\cdots,h_n)$的线性函数 $L(h)=a_1h_1+\cdots+a_nh_n$ 为 f 在 x 点的微分.

令 $a=(a_1,\cdots,a_n)$,a 与 h 的内积记为$\langle a,h\rangle$,即

$$\langle a,h\rangle = a_1h_1 + \cdots + a_nh_n,$$

并记$|h|=\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}$,则(1)式可写为

$$f(x+h) - f(x) = \langle a,h\rangle + o(|h|)\ .$$

线性函数 $L(h)=\langle a,h\rangle$ 由 a 唯一确定，我们称 a 为 f 在 x 点的微分，记为 $f'(x)$，即

$$f'(x)=(a_1,\cdots,a_n).$$

不难证明，$a_i=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故

$$f'(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right).$$

把(1)中的等号用不等号来代替，我们可引入一种较弱的可微性——次可微性.

定义 2 设 f 是$\mathbb{R}^n$ 上的函数，$x\in\mathbb{R}^n$. 若存在点 $p\in\mathbb{R}^n$，使得

$$f(x+h)-f(x)\geqslant\langle p,h\rangle-o(|h|),$$

则称 f 在 x 点次可微，并称 p 为 f 在 x 点的一个次微分.

一般说来，当 f 在 x 点次可微时，f 在 x 点的次微分可能不只一个. 记 f 在 x 点的所有次微分构成的集合为 $Df(x)$，则 $Df(x)\subset\mathbb{R}^n$. 当 f 在 x 点不次可微时，记 $Df(x)=\varnothing$.

易知，$p\in Df(x)$等价于

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)-\langle p,h\rangle}{|h|}\geqslant0. \tag{2}$$

例 1 设 $f(x)=|x|$，$x\in\mathbb{R}$，求 $Df(0)$.

解 $p\in\mathbb{R}$ 与 $h\in\mathbb{R}$ 的内积就是 p 与 h 的乘积. 由(2)，$p\in Df(0)$等价于

$$\lim_{h\to0}\frac{|h|-ph}{|h|}\geqslant0.$$

因为

$$\lim_{h\to0}\frac{|h|-ph}{|h|}=1-\lim_{h\to0}\frac{ph}{|h|}=1-|p|,$$

所以 $p\in Df(0)$等价于 $1-|p|\geqslant0$，从而 $Df(0)=[-1,1]$.

例 2 设 $f(x)=-|x|$，$x\in\mathbb{R}$，求 $Df(0)$.

解

$$Df(0)=\left\{p\in\mathbb{R}\,\middle|\,\lim_{h\to0}\frac{-|h|-ph}{|h|}\geqslant0\right\}$$

$$= \left\{ p \in \mathbb{R} \mid -1 - \overline{\lim_{h \to 0}} \frac{ph}{|h|} \geqslant 0 \right\}$$

$$= \{ p \in \mathbb{R} \mid -1 - |p| \geqslant 0 \} = \varnothing .$$

关于次可微，有下列性质．

性质 1 若函数 f 在 x 点可微，则 f 在 x 点次可微且 $Df(x) = \{f'(x)\}$ ．

证 显然，$f'(x) \in Df(x)$，所以 f 在 x 点次可微．若 $p \in Df(x)$，则由

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle p, h \rangle}{|h|} \geqslant 0$$

及

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \langle f'(x), h \rangle}{|h|} = 0$$

得

$$\overline{\lim_{h \to 0}} \frac{\langle (p - f'(x)), h \rangle}{|h|} \leqslant 0 .$$

取 $h = t\,(p - f'(x))$，$t > 0$，则 $|h| = t|p - f'(x)|$，且 $t \to 0^+$ 时 $h \to 0$，所以

$$|p - f'(x)| = \overline{\lim_{t \to 0^+}} \frac{t\langle (p - f'(x)), (p - f'(x)) \rangle}{t|p - f'(x)|} \leqslant 0 .$$

因此 $|p - f'(x)| = 0$，即 $p = f'(x)$，故 $Df(x) = \{f'(x)\}$．

性质 2 若函数 f 在 x 点次可微，函数 g 在 x 点可微，则 $f + g$ 在 x 点次可微，且

$$D(f+g)(x) = Df(x) + g'(x) .$$

证 性质 2 可由(2)式直接得到．

性质 3 若 x 是函数 f 的极小值点，则 $o \in Df(x)$．

证 性质 3 可由定义 2 直接得到．

5.8.2 Lipschitz 函数的次微分

定理 1 设 f 是开集 $U \subset \mathbb{R}^n$ 上的 Lipschitz 函数，其 Lipschitz 常数为 L．若 f 在 $x \in U$ 点次可微，则对任意的 $p \in Df(x)$，都有

$|p|\leqslant L$.

证 由定义 2 和定理 1 的条件得到

$$0\leqslant \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\langle p,h\rangle}{|h|}$$

$$\leqslant \lim_{h\to 0}\frac{L|h|-\langle p,h\rangle}{|h|}=L-\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\langle p,h\rangle}{|h|}.$$

取 $h=tp,t>0$,则当 $t\to 0^+$ 时 $h\to 0$,所以

$$L-|p|=L-\overline{\lim_{t\to 0^+}}\frac{\langle p,tp\rangle}{t|p|}\geqslant L-\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{\langle p,h\rangle}{|h|}\geqslant 0.$$

因此,$|p|\leqslant L$.

定理 2 设 f 是 $U_\delta(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x-x_0|<\delta\}$ 上的连续函数,L 为一非负常数. 若对每一 $x\in U_\delta(x_0)$,都有

$$\sup\{|p|\mid p\in Df(x)\}\leqslant L$$

(当 $Df(x)=\varnothing$ 时,规定 $\sup\{|p|\mid p\in Df(x)\}=-\infty$),则 f 在 $U_{\delta/8}(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x-x_0|<\delta/8\}$ 上是 Lipschitz 函数,其 Lipschitz 常数为 L.

证 对任意的 $x',x''\in U_{\delta/8}(x_0)$,$x'\neq x''$,记 $r=|x'-x''|$,则 $U_{3r}(x')\subset U_\delta(x_0)$. 令

$$\varphi(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,2r],\\ \dfrac{2r^2}{3r-t}, & t\in(2r,3r).\end{cases}$$

容易验证,$\varphi(t)\to+\infty$ $(t\to 3r^-)$,而且

$$\varphi'(t)=\begin{cases} 1, & t\in[0,2r],\\ \dfrac{2r^2}{(3r-t)^2}, & t\in(2r,3r).\end{cases}$$

因此,$|\varphi'(t)|\geqslant 1$,$t\in[0,3r)$. 对任意实数 $K>L$,令

$$\Phi(x)=f(x)+Kg(x),\ x\in U_{3r}(x'),$$

其中 $g(x)=\varphi(|x-x'|)$,则 $\lim\limits_{|x-x'|\to 3r^-}g(x)=+\infty$. 由于 f 在 $U_\delta(x_0)$ 上连续,因而 f 在有界闭集

$$\overline{U}_{3r}(x')=\{x\in\mathbb{R}^n\mid |x-x'|\leqslant 3r\}\subset U_\delta(x_0)$$

上有界，所以 $\lim\limits_{|x-x'|\to 3r^-}\Phi(x)=+\infty$，从而 $\Phi(x)$ 在 $U_{3r}(x')$ 内的某点 y 处达到它在 $U_{3r}(x')$ 上的最小值．由性质 3，$0\in D\Phi(y)$.

下面证明 $y=x'$．反设 $y\neq x'$，则关于 x 的函数

$$|x-x'|=\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x'_i)^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

在点 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 处可微，从而复合函数 $g(x)=\varphi(|x-x'|)$ 在点 y 处也可微．由性质 2，得到

$$0\in D\Phi(y)=Df(y)+Kg'(y).$$

于是存在 $p\in Df(y)$，使 $p=-Kg'(y)$．由复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial g(y)}{\partial x_i}=\varphi'(|y-x'|)\frac{\partial|y-x'|}{\partial x_i}$$

$$=\varphi'(|y-x'|)\frac{y_i-x'_i}{|y-x'|},$$

所以

$$g'(y)=\varphi'(|y-x'|)\left(\frac{y_1-x'_1}{|y-x'|},\cdots,\frac{y_n-x'_n}{|y-x'|}\right).$$

因此，$|g'(y)|=|\varphi'(|y-x'|)|\geqslant 1$，从而

$$|p|=|-Kg'(y)|\geqslant K>L.$$

这与 $|p|\leqslant L$ 发生矛盾，故 $y=x'$.

由于 $x''\in U_{3r}(x')$，所以 $\Phi(x'')\geqslant\Phi(x')$，而 $|x'-x''|=r\in[0,2r]$，故

$$f(x'')+K|x'-x''|\geqslant f(x').$$

因此，$f(x')-f(x'')\leqslant K|x'-x''|$．交换 x' 与 x'' 的位置，有 $f(x'')-f(x')\leqslant K|x'-x''|$．于是得到

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant K|x'-x''|.$$

由此即得 $|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|$.

定理 3 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开凸集，f 是 U 上的连续函数，L 是一非负常数．若对每一 $x\in U$，都有 $\sup\{|p|\,|p\in Df(x)\}\leqslant L$，则 f 在 U 上是 Lipschitz 函数，其 Lipschitz 常数为 L.

证 对任意的 $x',x''\in U$，$x'\neq x''$，记 A 为连接点 x' 与 x'' 的线

段．因 U 是凸集，故 $A\subset U$．由定理 2 知，对任意的 $x\in A$，存在 $r_x>0$，使得 f 在 $U_{r_x}(x)=\{y\in\mathbb{R}^n\mid|y-x|<r_x\}$ 上是 Lipschitz 函数，且其 Lipschitz 常数为 L.

显然，$\{U_{r_x}(x)\mid x\in A\}$ 构成 A 的一个开覆盖．由有限覆盖定理知存在 A 的一个有限子集 C，使得 $\bigcup_{z\in C}U_{r_z}(z)\supset A$．由此及模 $|x|$ 具有三角不等式的性质，容易验证

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant L|x'-x''|.$$

推论 1 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开凸集，f 是 U 上的连续函数．若对 f 的每个次可微点 x，都有 $Df(x)=\{0\}$，则 f 在 U 上为常值函数．

证 取定一点 $x_0\in U$，由定理 3 可知对任意的 $x\in U$，都有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant 0|x-x_0|=0,$$

所以 $f(x)\equiv f(x_0)$.

推论 2 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的开集，f 是 U 上的连续函数，则 f 在 U 中的次可微点构成之集在 U 中稠密．

证 用反证法．若不然，则存在 $x'\in U$ 及 $r>0$，使得 f 在 $U_r(x')$ 上无处次可微．即对每一 $y\in U_r(x')$，都有 $Df(y)=\varnothing$．由推论 1 知 f 在 $U_r(x')$ 上为常值函数，于是 f 在 $U_r(x')$ 中每一点都次可微，矛盾．

5.8.3 次微分的中值定理

定理 4 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 是开凸集，f 是 U 上的连续函数．$a\in\mathbb{R}^n$，$r>0$．若对任意的 $x\in U$，都有

$$Df(x)\subset B_r(a)=\{y\in\mathbb{R}^n\mid|y-a|\leqslant r\},$$

则对任意的 $x,y\in U$，都有 $p\in B_r(a)$，使得

$$f(x)-f(y)=\langle p,x-y\rangle.$$

证 令 $g(x)=f(x)-\langle a,x\rangle$．容易验证，当 f 在 x 点次可微时，有

$$Dg(x)=Df(x)-a\subset B_r(0).$$

由定理 3，$|g(x)-g(y)|\leqslant r|x-y|$．当 $x\neq y$ 时，令

$$p=\frac{g(x)-g(y)}{|x-y|^2}(x-y),$$

则$|p|\leqslant r$，所以$a+p\in B_r(a)$，且

$$\begin{aligned}\langle p+a,x-y\rangle&=\langle p,x-y\rangle+\langle a,x-y\rangle\\&=g(x)-g(y)+\langle a,x-y\rangle=f(x)-f(y).\end{aligned}$$

定理得证.

下面，我们讨论$n=1$的情况.

定理5 设f是开区间(a,b)上的连续函数，则f在点$x\in(a,b)$次可微的充要条件是$d^-f(x)\leqslant d_+f(x)$，且此时$Df(x)=[d^-f(x),d_+f(x)]$，其中

$$d^-f(x)=\overline{\lim_{t\to0^-}}\frac{f(x+t)-f(x)}{t},$$

$$d_+f(x)=\underline{\lim_{t\to0^+}}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}.$$

证 充分性. 若$d^-f(x)\leqslant d_+f(x)$，则对任意满足不等式$d^-f(x)\leqslant p\leqslant d_+f(x)$的实数$p$，有

$$\overline{\lim_{t\to0^-}}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\leqslant p\leqslant\underline{\lim_{t\to0^+}}\frac{f(x+t)-f(x)}{t},$$

所以

$$0\leqslant\underline{\lim_{t\to0^+}}\frac{f(x+t)-f(x)-pt}{t}=\underline{\lim_{t\to0^+}}\frac{f(x+t)-f(x)-pt}{|t|},$$

$$\begin{aligned}0\leqslant p-\overline{\lim_{t\to0^-}}\frac{f(x+t)-f(x)}{t}&=\underline{\lim_{t\to0^-}}\frac{f(x+t)-f(x)-pt}{-t}\\&=\underline{\lim_{t\to0^-}}\frac{f(x+t)-f(x)-pt}{|t|}.\end{aligned}$$

综上可得

$$\underline{\lim_{t\to0}}\frac{f(x+t)-f(x)-pt}{|t|}\geqslant0.$$

由(2)知$p\in Df(x)$，所以f在x点次可微，且$[d^-f(x),d_+f(x)]\subset Df(x)$.

必要性. 若f在x点次可微，则对任意的$p\in Df(x)$，有

$$\varliminf_{t\to 0}\frac{f(x+t)-f(x)-pt}{|t|}\geqslant 0.$$

因此

$$\varliminf_{t\to 0^-}\frac{f(x+t)-f(x)-pt}{|t|}\geqslant 0, \tag{3}$$

$$\varliminf_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x)-pt}{|t|}\geqslant 0. \tag{4}$$

由(3)并注意到在$t\to 0^-$的过程中$|t|=-t$,可得$p\geqslant d^-f(x)$. 由(4)即得$p\leqslant d_+f(x)$. 所以$d^-f(x)\leqslant d_+f(x)$且$p\in[d^-f(x),d_+f(x)]$. 因此

$$Df(x)\subset[d^-f(x),d_+f(x)].$$

综上即得$Df(x)=[d^-f(x),d_+f(x)]$.

定理 6 设f是开区间(a,b)上的连续函数. 若对f的每个次可微点x,都

$$\sup\{p\mid p\in Df(x)\}\leqslant 0,$$

则f是(a,b)上的单减函数.

证 用反证法. 若不然,即有$x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$,使得$f(x_1)<f(x_2)$. 取c使$a<c<x_1$,并作辅助函数

$$g(x)=\frac{1}{x-c},\ x\in(c,x_2].$$

取实数v,使$0<v<\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{g(x_1)-g(x_2)}$,并令

$$\varphi(x)=f(x)+vg(x),\quad x\in(c,x_2],$$

则$\varphi(x_2)>\varphi(x_1)$且$\lim\limits_{x\to c^+}\varphi(x)=+\infty$,所以$(c,x_2]$上的连续函数$\varphi$在某点$x_0\in(c,x_2)$处达到极小值. 由性质 3 及性质 2 可得

$$-vg'(x_0)\in Df(x_0).$$

因此$-vg'(x_0)\leqslant 0$,即$g'(x_0)\geqslant 0$. 然而

$$g'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-c)^2}<0,$$

从而导致矛盾. 证毕.

类似于定理 6,我们有:

定理 7 设 f 是开区间 (a,b) 上的连续函数．若对 f 的每个次可微点 $x\in(a,b)$，都有

$$\inf\{p\mid p\in Df(x)\}\geqslant 0,$$

则 f 是 (a,b) 上的单增函数．

定理 8 设 f 是开区间 (a,b) 上的连续函数，S_f 是 f 在 (a,b) 上的所有次可微点构成之集．令

$$\alpha=\inf\{p\mid p\in Df(x),\ x\in S_f\},$$

$$\beta=\sup\{p\mid p\in Df(x),\ x\in S_f\},$$

则对任意的 $x,y\in(a,b)$，存在实数 p，使 $\alpha\leqslant p\leqslant\beta$，且

$$f(x)-f(y)=p(x-y).$$

证 (i) 当 $\alpha=-\infty,\beta=+\infty$ 时，定理 8 显然成立．

(ii) 当 $\alpha=-\infty,\beta<+\infty$ 时，作

$$g(x)=f(x)-\beta x,\quad x\in(a,b).$$

易知，对每一 $x\in S_g=S_f$ 及 $p\in Dg(x)$，都有 $p\leqslant 0$．由定理 6，g 是 (a,b) 上的单减函数，所以对任意的 $x,y\in(a,b)$，$x\leqslant y$，都有 $g(x)\geqslant g(y)$，即

$$f(y)-f(x)\leqslant\beta(y-x).$$

因 $y-x\geqslant 0$，故有 $p\in(-\infty,\beta]$，使得

$$f(y)-f(x)=p(y-x).$$

(iii) 当 $-\infty<\alpha,\beta=+\infty$ 时，仿(ii)利用定理 7 即得证．

(iv) 当 $-\infty<\alpha,\beta<+\infty$ 时，取 $x_0=(\alpha+\beta)/2,r=(\beta-\alpha)/2$．此时对每一 $x\in(a,b)$，都有 $Df(x)\subset[\alpha,\beta]=B_r(x_0)$．由定理 4，对任意的 $x,y\in(a,b)$，都有 $p\in B_r(x_0)=[\alpha,\beta]$，使得

$$f(x)-f(y)=p(x-y).$$

5.8.4 评注

由于应用的需要，出现了许多种推广的微分．本节介绍的次微分是其中比较成功的且具有实用意义的一种推广的微分．本节的结果是在文献[166]和[181]的基础上经综合加工得到的，个别结果是新的．

§5.9 多元函数积分的几个问题

5.9.1 二重积分与累次积分之间的关系

在多元函数积分学中，讨论重积分与累次积分的关系是十分重要的，它给出了计算重积分的一个简便而行之有效的方法. 然而，把重积分化为累次积分并不是永远通行无阻的. 事实上，二重积分存在时，两个累次积分未必存在；反之，两个累次积分存在且相等时，二重积分也未必存在. 下面，我们给出这方面的两个例子.

例 1 两个累次积分存在且相等，但二重积分不存在的函数.

设 x 为一有理数，则可把它表作 p_x/q_x，其中 p_x 与 q_x 是互质的整数且 $q_x>0$. 今在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{ 为有理点且 } q_x=q_y,\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

我们先证 f 在 D 上的两个累次积分均存在且相等.

事实上，对固定的 $y\in[0,1]$，当 y 为无理数时，$\varphi(x)=f(x,y)\equiv 0$，因而

$$\int_0^1 f(x,y)dx=0.$$

当 y 为有理数时，y 可表作 p/q，而分母等于 q 的有理数不超过 q 个，所以至多在 q 个点上，$f(x,y)=1$；而在其它的点上，$f(x,y)=0$. 由此可见，$\varphi(x)=f(x,y)$ 在 $[0,1]$ 上可积，且

$$\int_0^1 f(x,y)dx=0.$$

总之，对任一 $y\in[0,1]$，恒有 $\int_0^1 f(x,y)dx=0$，从而

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=0.$$

同理可证

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=0.$$

为证 f 在 D 上的二重积分不存在，我们只要证明 f 在 D 上处处不连续即可. 为此，令

$$G=\{(x,y)\mid (x,y)\text{ 为 }D\text{ 中的有理点且 }q_x=q_y\}.$$

易证，G 在 D 内稠密，即 D 中任一开矩形 $(a,b)\times(c,d)$ 都含有 G 的点，这里，$0\leqslant a<b\leqslant 1$，$0\leqslant c<d\leqslant 1$. 事实上，对 x 轴上的区间[0，1]作等分：

2 等分，3 等分，…，n 等分，…，

依自然数列作下去，则必存在自然数 N_1，使 $1/N_1<b-a$. 于是，当 $n>N_1$ 时，对任一 n 等分，必有一个分点落在 (a,b) 之中. 设此分点为 m_n/n，即有点集 $\{m_n/n\mid n=N_1,N_1+1,\cdots\}$ 包含于 (a,b) 之中.

同理，存在自然数 N_2，使 $1/N_2<d-c$，当 $n>N_2$ 时必有落在 (c,d) 内的分点 r_n/n. 于是，$\{r_n/n\mid n=N_2,N_2+1,\cdots\}$ 构成 (c,d) 的子集.

取 $n_0=\max\{N_1,N_2\}$，则有

$$\{m_n/n\mid n=n_0,n_0+1,\cdots\}\subset(a,b),$$

$$\{r_n/n\mid n=n_0,n_0+1,\cdots\}\subset(c,d).$$

由于素数是无穷多的，所以在 n_0 之后的自然数中必有素数 q，而 $m_q/q,r_q/q$ 均为不可约分式，它们分别落在 (a,b) 与 (c,d) 之中，亦即 $(m_q/q,r_q/q)\in(a,b)\times(c,d)$. 因此，$G$ 在 D 中稠密.

若 $(x,y)\in G$，则 $f(x,y)=1$. 由于点 (x,y) 的任一邻域都含有 $D\backslash G$ 的点，在这种点上，函数值等于零，所以 f 在 G 上处处不连续.

若 $(x,y)\in D\backslash G$，则 $f(x,y)=0$. 由于 G 在 D 内稠密，所以点 (x,y) 的任一邻域都含有 G 的点，在这种点上，函数值等于 1，因而 f 在 $D\backslash G$ 上也处处不连续.

总之，我们已经证明了函数 f 在 D 上处处不连续，从而 f 在 D 上并不可积.

注 1 这个例子是由 Pringsneim[163]作出的.

例 2 二重积分存在而两个累次积分都不存在的函数.

设 x 为一有理数，将它表作正分母的既约分数后，分母表示

为 q_x. 今在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上定义函数 f 如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & x \text{ 和 } y \text{ 都是有理数},\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

兹证 f 在 D 上是可积的. 为此，我们先来证明 f 在 D 中任一无理点处连续，而在其余点处间断.

事实上，设 (x_0,y_0) 为 D 中的任一无理点，对于任给 $\varepsilon>0$，只有有限个小于或等于 $2/\varepsilon$ 的自然数. 因此，使得 $1/q_x\geqslant\varepsilon/2, 1/q_y\geqslant\varepsilon/2$ 的有理数 $x=p_x/q_x, y=p_y/q_y$ 只有有限个. 于是，存在 x_0（注意，x_0 是无理数！）的 δ 邻域，使得适合不等式 $1/q_x\geqslant\varepsilon/2$ 的有理数 x 全在 δ 邻域之外. 同样，由于 y_0 也是无理数，故存在 y_0 的 ξ 邻域，使得适合不等 $1/q_y\geqslant\varepsilon/2$ 的有理数 y 全在 ξ 邻域之外. 因此，存在点 (x_0,y_0) 的一个 η 邻域，在这个邻域中，若 (x,y) 为有理点，则 $1/q_x+1/q_y<\varepsilon$；若 (x,y) 不是有理点，则 $f(x,y)=0$；而在 (x_0,y_0) 处，$f(x_0,y_0)=0$. 由此可知，当点 (x,y) 落在 (x_0,y_0) 的 η 邻域时，就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

于是，f 在 D 中无理点上的连续性得以证明.

设 (x_0,y_0) 为 D 中的任一有理点，则

$$f(x_0,y_0)=\frac{1}{q_{x_0}}+\frac{1}{q_{y_0}}=r>0.$$

因为 (x_0,y_0) 的任一 δ 邻域中都含有无理点 (x,y)，在这种点上 $f(x,y)=0$，所以当取 $\varepsilon(0<\varepsilon<r)$ 时，就无法使

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

成立. 因此，f 在 D 中的有理点上不连续.

设 (x_0,y_0) 为 D 中任一其余的点，不妨设 x_0 为有理数而 y_0 为无理数，此时 $f(x_0,y_0)=0$. 在 (x_0,y_0) 的任一 δ 邻域中都有有理点 (x_0,y)，在这种点上，有

$$f(x_0,y)=\frac{1}{q_{x_0}}+\frac{1}{q_y}>\frac{1}{q_{x_0}}>0.$$

于是，当取 $\varepsilon(0<\varepsilon<\frac{1}{q_{x_0}})$ 时，就无法使

$$|f(x_0,y_0)-f(x_0,y)|<\varepsilon$$

成立．因此，f 在 (x_0,y_0) 处不连续．

现设 I 为 $D=[0,1]\times[0,1]$ 中的全体无理点所成之集，而 I_1 与 I_2 分别为 x 轴上的区间 $[0,1]$ 与 y 轴上的区间 $[0,1]$ 中的全体无理点，则有 $I=I_1\times I_2$．因 $mI=mI_1\cdot mI_2=1$，故 $m(D\backslash I)=0$，可见 f 在 D 上的不连续点所成之集其测度为零．又，f 在 D 上有界．因此，由 Lebesgue 定理可知，f 在 D 上是可积的．

最后，我们证明 f 在 D 上的两个累次积分都不存在，从而不能把 f 在 D 上的二重积分化为累次积分来计算．

我们任意固定 $y\in[0,1]$，当 y 为有理数时，q_y 为一确定的自然数，且有

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

易见，$\varphi(x)=f(x,y)$ 在区间 $[0,1]$ 上处处不连续，从而 φ 在 $[0,1]$ 上不可积，也就根本谈不上 f 在 D 上的累次积分．对于固定的 $x\in[0,1]$，也有同样的结果．

注 2 在 Lebesgue 积分理论中，有下述著名的定理：

Fubini 定理 (i) 设 f 是 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的 Lebesgue 可积函数，则在 $[a,b]$ 上除去一个零测度集外，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在区间 $[c,d]$ 上是 Lebesgue 可积的，且函数

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)dy$$

在区间 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积（在上述零测度集上，$\varphi(x)$ 可任意定义）．同时下述等式成立：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

(ii) 设 f 是定义在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的非负可测函数．若 f 的两个累次积分 $\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$ 与 $\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$ 中有一个

存在，则 f 在 D 上 Lebesgue 可积，从而另一个累次积分也存在，且

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$
$$= \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

例 1 说明了在 Riemann 积分范围内，上述结论(ii)并不成立.

5.9.2 关于函数乘积积分的一个定理

在 Lebesgue 积分理论中，有下述重要定理：

定理 设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可积，$g(y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可积，则 $f(x)g(y)$ 在 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 上 Lebesgue 可积.

应当指出，在 Riemann 积分范围内，上述定理并不成立. 例如，在区间 $I_1=[0,+\infty)$ 上定义函数：

$$f(x) = \sin x/n, 2(n-1)\pi \leqslant x < 2n\pi, \quad n = 1,2,\cdots;$$

又在区间 $I_2=[0,+\infty)$ 上定义函数：

$$g(y) = \sin y/n, 2(n-1)\pi \leqslant y < 2n\pi, \quad n = 1,2,\cdots.$$

并令 $h(x,y)=f(x)g(y), (x,y)\in I_1\times I_2$.

易见，$f(x)$ 与 $g(y)$ 分别在 I_1 与 I_2 上是广义可积的，且其积分值为零.

兹证 $h(x,y)$ 在 $I_1\times I_2$ 上并不广义可积.

事实上，如果 $h(x,y)$ 在 $I_1\times I_2$ 上是广义可积的，那么，由于广义二重积分是一种绝对收敛积分，这有别于广义单积分. 因而 $|h(x,y)|$ 在 $I_1\times I_2$ 上也应当是广义可积的. 然而

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\int_0^{2n\pi}\int_0^{2m\pi}|h(x,y)|dxdy$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\left(\lim_{m\to\infty}\int_0^{2m\pi}|g(y)|dy\right)dx$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2n\pi}|f(x)|\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\int_{2(k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{|\sin y|}{k}dy\right)dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_0^{2n\pi} |f(x)|dx\left(\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{4}{k}\right)dx = +\infty .$$

因此，$|h(x,y)|$在$I_1\times I_2$上并不广义可积，从而$h(x,y)$在$I_1\times I_2$上也不广义可积.

注3 如果函数$f(x)$与$g(y)$分别在有限区间$[a,b]$与$[c,d]$上 Riemann 可积，那么函数$f(x)g(y)$在$[a,b]\times[c,d]$上也必 Riemann 可积. 上述例子也说明了不能把这个命题推广到无限区间的情形.

5.9.3 含参变量的无穷限广义积分的绝对收敛与一致收敛性

关于含参变量的广义积分的绝对收敛与一致收敛性，有下述著名的 Weierstrass 判别法：

定理 设有函数$M(t)$，使$|f(x,t)|\leqslant M(t)$，$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，$a\leqslant t<+\infty$. 如果积分$\int_a^{+\infty}M(t)dt$收敛，那么对每个$x\in[\alpha,\beta]$，积分$\int_a^{+\infty}f(x,t)dt$绝对收敛，且关于$x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛.

应当注意，当$\int_a^{+\infty}f(x,t)dt$绝对收敛且关于x在$[\alpha,\beta]$上一致收敛时，不能保证$\int_a^{+\infty}|f(x,t)|dt$关于$x$在$[\alpha,\beta]$上一致收敛，这时就不能应用 Weierstrass 判别法去判定$\int_a^{+\infty}f(x,t)dt$的一致收敛性. 为说明上面的结论，我们先证明下面的引理 1：

引理1 设f是区间$[0,+\infty)$上的正值单减函数，又在区间$[0,+\infty)$上定义函数g如下：

$$g(x)=\begin{cases}1, & 2k\leqslant x<2k+1, \quad k=0,1,\cdots,\\ -1, & 2k-1\leqslant x<2k, \quad k=1,2,\cdots.\end{cases}$$

设$[a,b]$是$[0,+\infty)$的一个子区间，则存在$c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt . \tag{1}$$

证 令 $A=\dfrac{\int_a^b f(t)g(t)dt}{f(a)}$，$G(x)=\int_a^x g(t)dt$.

因 g 在$[a,b]$上可积，故 G 在$[a,b]$上连续．因此，如能证明

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b}G(x)\leqslant A\leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b}G(x)\ , \tag{2}$$

则由连续函数介值定理可知，存在 $c\in[a,b]$，使得 $G(c)=A$，即(1)成立．现在我们就来证明不等式(2)．

为了行文方便，我们称$[2k,2k+1)$ $(k=0,1,\cdots)$为偶区间，而称$[2k-1,2k)$ $(k=1,2,\cdots)$为奇区间．若 $a=b$，则(1)当然成立，故可设 $a\neq b$．显然，a 或者属于某个偶区间，或者属于某个奇区间．我们先考虑 a 属于某个偶区间的情形．设 a^* 是大于 a 的最小自然数，并令 $d=a^*-a$．由函数 g 的定义及 f 的单调减少的条件可知，

$$-(1-d)f(a^*)<\int_a^b f(t)g(t)dt<df(a)\ . \tag{3}$$

因为$-f(a^*)>-f(a)$，故由(3)得到

$$(-1+d)f(a)<\int_a^b f(t)g(t)dt<df(a)\ ,$$

从而$-1+d<A<d$．令 $b^*=a^*+1$，并注意，当 $x\in[a,b]$时，$-1+d\leqslant G(x)\leqslant d$．我们分别就 $b\geqslant b^*$ 与 $b\in(a,b^*)$来证明不等式(2)．

(i) 若 $b\geqslant b^*$，则由 a 属于某个偶区间以及 g 的定义可知，G 在区间$[a,b]$上既取到 d，也取到$-1+d$．于是由$-1+d<A<d$ 便知不等式(2)成立．

(ii) 设 $b\in(a,b^*)$，并令$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}G(x)=D$．如果 $0<D<d$，则不可能有 $b\geqslant a^*$．理由如下：据 a^* 的取法及 g 的定义，当 $b\geqslant a^*$ 时，就有

$$D=\max_{a\leqslant x\leqslant b}G(x)=d\ ,$$

这与 $D<d$ 发生矛盾．因此，只能是 $b\in(a,a^*)$．此时，由 a 的取法及 g 的定义可知，$b-a=D$．由此得到

$$\int_a^b f(t)g(t)dt<Df(a)\ ,$$

从而 $A<D=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}G(x)$．

再令 $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}G(x)=\tilde{D}$．如果$-1+d<\tilde{D}<0$，则 $b\in(a^*,b^*)$．若

令 $\tilde{a}=a^*+d$，则有 $b-\tilde{a}=-\tilde{D}$. 由此得到

$$\int_a^b f(t)g(t)dt > \tilde{D}f(a)\ ,$$

从而 $A>\tilde{D}=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}G(x)$.

综上所述，便知不等式(2)成立，即当 a 属于某个偶区间时引理得证.

现设 a 属于某个奇区间，此时用 $-g$ 替代 g，则存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(t)(-g(t))dt = f(a)\int_a^c(-g(t))dt\ ,$$

上式等价于(1)，引理证毕.

定理 1 设函数 g 如引理 1 所述，则积分 $\int_0^{+\infty}\frac{xg(t)}{x^2+t^2}dt$ 在 $x\geqslant 0$ 上一致收敛，$\int_0^{+\infty}\left|\frac{xg(t)}{x^2+t^2}\right|dt$ 在 $x\geqslant 0$ 上收敛而不一致收敛.

证 设 $0<a<b$，由引理 1 知存在 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b\frac{x}{x^2+t^2}g(t)dt = \frac{x}{x^2+a^2}\int_a^c g(t)dt\ .$$

因 $\left|\int_a^c g(t)dt\right|\leqslant 1$，故由上式可得

$$\left|\int_a^b\frac{x}{x^2+t^2}g(t)dt\right|\leqslant\frac{x}{x^2+a^2}\ . \tag{4}$$

当 $x\geqslant 0$ 时，$x/(x^2+a^2)\leqslant 1/2a$，故由(4)知对任意 $\varepsilon>0$，存在实数 μ，当 $a\geqslant\mu$ 时，对一切 $x\geqslant 0$，均有

$$\left|\int_a^b\frac{x}{x^2+a^2}g(t)dt\right|<\varepsilon.$$

据 Cauchy 一致收敛准则可知，$\int_0^{+\infty}\frac{xg(t)}{x^2+t^2}dt$ 在 $x\geqslant 0$ 上一致收敛. 令

$$F(x) = \int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+t^2}dt\ ,$$

则 $F(0)=0$，而当 $x>0$ 时，$F(x)=\pi/2$，故 $F(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不连续. 因此，广义积分

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{xg(t)}{x^2+t^2}\right|dt=\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+t^2}dt$$

在 $x\geqslant 0$ 上收敛而不一致收敛.

注 4 本小节的材料来源于文献[127].

5.9.4 恰当微分的线积分

定理 2 设函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 以及 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 在光滑或逐段光滑闭曲线 l 围成的单连通闭区域 D 上连续. 若对 D 内任意一点 (x,y)，有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则对 D 中联结两点 (a_0,b_0) 与 (a_1,b_1) 的任意曲线弧 C，曲线积分 $\int_C Pdx+Qdy$ 有相同的值.

证 关于定理 2，通常是用 Green 公式来证明的. 这里，我们向读者介绍一种不应用 Green 公式的证法.

设联结两点 (a_0,b_0) 与 (a_1,b_1) 且位于 D 内的曲线弧 C，其参数方程为 $x=x(t),y=y(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$，这里，$(x(0),y(0))=(a_0,b_0),(x(1),y(1))=(a_1,b_1)$，$x(t)$ 与 $y(t)$ 都是区间 $[0,1]$ 上的连续可微函数，则

$$\int_C Pdx+Qdy=\int_0^1\left\{P[x(t),y(t)]\frac{dx(t)}{dt}+Q[x(t),y(t)]\frac{dy(t)}{dt}\right\}dt. \tag{5}$$

我们把上式右端的积分记作 $J(C)$，并先设区域 D 是凸的. 令 C_0，C_1 是联结点 (a_0,b_0) 与 (a_1,b_1) 且位于 D 中的任意两条曲线弧，其参数方程分别为 $x=x_i(t),y=y_i(t)$ $(i=0,1,0\leqslant t\leqslant 1)$，这里 $(x_i(0),y_i(0))=(a_0,b_0),(x_i(1),y_i(1))=(a_1,b_1),x_i(t)$ 与 $y_i(t)$ 都是区间 $[0,1]$ 上的连续可微函数. 现在我们考虑由下列等式确定的联结 (a_0,b_0) 与 (a_1,b_1) 的一族曲线弧 C_θ：

$$\begin{cases}x=(1-\theta)x_0(t)+\theta x_1(t),\\ y=(1-\theta)y_0(t)+\theta y_1(t),\end{cases} \tag{6}$$

式中 $0\leqslant t\leqslant 1$，$0\leqslant\theta\leqslant 1$. 由于 D 是凸区域，故每条曲线弧 C_θ 位于

D 中．为简单起见，(6)式右端分别记作 $x_\theta(t)$ 与 $y_\theta(t)$．

我们将证明，若对 D 中每一点 (x,y)，都有 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则有 $\frac{\partial J(C_\theta)}{\partial\theta}=0$，从而 $J(C_0)=J(C_1)$，于是定理 2 就成立．当 D 不是凸区域时，可用平行于坐标轴的直线把 D 分成有限个凸区域，再应用已证的结果，便知此时定理 2 也成立．

据(5)式，我们有

$$J(C_\theta)=\int_0^1\left\{P[x_\theta(t),y_\theta(t)]\frac{dx_\theta(t)}{dt}+Q[x_\theta(t),y_\theta(t)]\frac{dy_\theta(t)}{dt}\right\}dt,$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{dJ(C_\theta)}{d\theta}=\int_0^1\Bigg\{&\left[\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y_\theta}{\partial\theta}\right]\frac{dx_\theta}{dt}\\&+\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y_\theta}{\partial\theta}\right]\frac{dy_\theta}{dt}\\&+P\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)+Q\left(\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)\Bigg\}dt.\end{aligned}$$

由(6)得到 $\frac{\partial x_\theta}{\partial\theta}=x_1-x_0$，$\frac{\partial y_\theta}{\partial\theta}=y_1-y_0$，再由条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，便有

$$\begin{aligned}\frac{dJ(C_\theta)}{d\theta}=\int_0^1\Bigg\{&\left[\frac{\partial P}{\partial x}\frac{dx_\theta}{dt}+\frac{\partial P}{\partial y}\frac{dy_\theta}{dt}\right](x_1-x_0)\\&+P\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)+\left[\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{dx_\theta}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial y}\frac{dy_\theta}{dt}\right](y_1-y_0)\\&+Q\left(\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy_0}{dt}\right)\Bigg\}dt\\=&\int_0^1\frac{d}{dt}[(x_1-x_0)P+(y_1-y_0)Q]dt\\=&[(x_1-x_0)P+(y_1-y_0)Q]\Big|_{t=0}^{t=1}=0.\end{aligned}$$

定理 2 证毕．

注 5 本小节的材料来源于文献[121].

§5.10 二重级数收敛判别法

在数学分析中有下述重要定理：

定理 1 如果函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上正值单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，则数列

$$u_n=\sum_{i=0}^{n} f(i)-\int_0^n f(x)dx\ ,\quad n=1,2,\cdots$$

收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=C$，这里 $0<C<f(0)$.

推论 1 在定理 1 的条件下，当 $0<p<q$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} u_n(p,q)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=np}^{nq} f(i)-\int_{np}^{nq} f(x)dx\right)=0\ .$$

推论 2 在定理 1 的条件下，级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} f(i)$ 与积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 同时敛散.

应当指出，推论 2 不能相应地推广到二重级数与二重积分. 例如，令

$$f(x,y)=(x+1)^{-1}e^{-(x+1)y},$$

则函数 f 在区域 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上正值单调减少，即当 $x_1<x_2, y_1<y_2$ 时，$f(x_1,y_1)\geqslant f(x_2,y_2)$，且

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} f(x,y)=0\ .$$

容易验证，二重积分

$$I=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}(x+1)^{-1}e^{-(x+1)y}dxdy$$

收敛. 然而，由于级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(i+1)^{-1}$ 发散，故二重级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}(i+1)^{-1}e^{-(i+1)j}$ 也发散.

上述例子表明，二重积分收敛并不是相应的二重级数收敛的充分条件.

现在，我们进一步研究二重级数收敛的条件. 为此，先引入下

述概念：

定义 1 称函数 f 在区域 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上具有性质(A)，是指(A_1)：f 在 D 上取正值，且对任意自然数 n，f 在区域 $[0,n]\times[0,n]$ 上可积；(A_2)：当 $x_1<x_2$，$y_1<y_2$ 时，$f(x_1,y_1)\geqslant f(x_2,y_2)$；($A_3$)：$f(x,y)\to 0$ $(x+y\to+\infty)$.

由(A_1)和(A_2)可知，对任意自然数 $p\geqslant 0, q\geqslant 0$，有

$$\sum_{i=p+1}^{p+n}\sum_{j=q+1}^{q+m} f(i,j)\leqslant\int_p^{p+n}\int_q^{q+m} f(x,y)dxdy \leqslant\sum_{i=p}^{p+n-1}\sum_{j=q}^{q+m-1} f(i,j)\,. \tag{1}$$

由于

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(i,j)+\sum_{i=1}^{n} f(i,0) +\sum_{j=1}^{m} f(0,j)+f(0,0)\,,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i,0)\leqslant\int_0^n f(x,0)dx,\quad \sum_{j=1}^{m} f(0,j)\leqslant\int_0^m f(0,y)dy\,,$$

因而从不等式(1)的左端得到

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(i,j)-\int_0^n\int_0^m f(x,y)dxdy \leqslant\int_0^n f(x,0)dx+\int_0^m f(0,y)dy+f(0,0)\,.$$

类似地，从展开式

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(i,j)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(i,j)+\sum_{i=0}^{n-1} f(i,m) +\sum_{j=0}^{m-1} f(n,j)+f(n,m)\,,$$

以及由于

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(i,m)\geqslant\int_0^n f(x,m)dx,\quad \sum_{j=0}^{m-1} f(n,j)\geqslant\int_0^m f(n,y)dy\,,$$

再结合不等式(1)的右端，可得

$$0<f(n,m)+\int_0^n f(x,m)dx+\int_0^m f(n,y)dy$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} f(i,j) - \int_0^n\int_0^m f(x,y)dxdy .$$

现设积分 $\int_0^{+\infty} f(x,0)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(0,y)dy$ 均收敛，并令

$$u_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(i,j) - \int_0^n\int_0^n f(x,y)dxdy .$$

引理 1 若函数 f 在区域 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上具有性质(A)，且积分 $\int_0^{+\infty} f(x,0)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(0,y)dy$ 均收敛，则对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 μ，当 $n>\mu$ 时，就有

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i,m) < \varepsilon .$$

也存在自然数 ν，当 $n>\nu$ 时，就有

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(n,j) < \varepsilon .$$

证 因积分 $\int_0^{+\infty} f(x,0)dx$ 收敛，故级数 $\sum_{i=0}^{\infty} f(i,0)$ 也收敛，从而 $\sum_{i=0}^{\infty} f(i,m)$ 收敛．于是对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使

$$\sum_{i=N}^{\infty} f(i,0) < \frac{1}{2}\varepsilon ,$$

从而对任意 m，有 $\sum_{i=N}^{\infty} f(i,m) < \frac{1}{2}\varepsilon$.

由(A_3)，存在自然数 μ，当 $m>\mu$ 时，

$$f(0,m) < \varepsilon/2N ,$$

因而 $f(i,m)<\varepsilon/2N$，$\sum_{i=0}^{N-1} f(i,m) < \frac{1}{2}\varepsilon$. 于是

$$\sum_{i=0}^{\infty} f(i,m) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i,m) + \sum_{i=N}^{\infty} f(i,m)$$
$$< \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon .$$

类似地，可证明引理 1 的第二部分．证毕．

现在考虑差

$$u_{n+p}-u_n=\sum_{i=0}^{n+p}\sum_{j=0}^{n+p}f(i,j)-\int_0^{n+p}\int_0^{n+p}f(x,y)dxdy$$
$$-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}f(i,j)+\int_0^n\int_0^n f(x,y)dxdy$$
$$=\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=n+1}^{n+p}f(i,j)-\int_0^n\int_n^{n+p}f(x,y)dxdy\Big)$$
$$+\Big(\sum_{i=n+1}^{n+p}\sum_{j=1}^{n+p}f(i,j)-\int_n^{n+p}\int_0^{n+p}f(x,y)dxdy\Big)$$
$$+\sum_{i=n+1}^{n+p}f(i,0)+\sum_{j=n+1}^{n+p}f(0,j).$$

据(1),括号内的表达式都是非正的,故

$$u_{n+p}-u_n\leqslant\sum_{i=n+1}^{n+p}f(i,0)+\sum_{j=n+1}^{n+p}f(0,j). \tag{2}$$

另一方面,我们注意到

$$u_{n+p}-u_n=\Big(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=n}^{n+p}f(i,j)-\int_0^n\int_n^{n+p}f(x,y)dxdy\Big)$$
$$+\Big(\sum_{i=n}^{n+p}\sum_{j=0}^{n+p}f(i,j)-\int_n^{n+p}\int_0^{n+p}f(x,y)dxdy\Big)$$
$$-\sum_{i=0}^{n}f(i,n)-\sum_{j=0}^{n+p}f(n,j).$$

由于括号内的表达式都是非负的,故得

$$-\Big(\sum_{i=0}^{n}f(i,n)+\sum_{j=0}^{n+p}f(n,j)\Big)\leqslant u_{n+p}-u_n. \tag{3}$$

由(3)及引理 1 知,存在自然数 ν,当 $n>\nu$ 时,就有

$$-\varepsilon\leqslant u_{n+p}-u_n.$$

此外,由积分 $\int_0^{+\infty}f(x,0)dx$ 与 $\int_0^{+\infty}f(0,y)dy$ 收敛的条件可知,存在自然数 ν^*,当 $n>\nu^*$ 时,(2) 的右端小于 ε. 于是,当 $n>\max\{\nu,\nu^*\}$ 时,对任意自然数 p,有

$$|u_{n+p}-u_n|<\varepsilon.$$

这样一来,我们得到了类似于定理 1 的下述定理:

定理 2 若函数 f 在区域 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上具有性

质(A)，且积分 $\int_0^{+\infty} f(x,0)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(0,y)dy$ 都收敛，则数列 $u_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} f(i,j) - \int_0^n\int_0^n f(x,y)dxdy$ $(n=1,2,\cdots)$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} u_n = C$，这里 $0 < C < \int_0^{+\infty} f(x,0)dx + \int_0^{+\infty} f(0,y)dy + f(0,0)$.

推论 3 若函数 f 在区域 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上具有性质(A)，且积分 $\int_0^{+\infty} f(x,0)dx$ 与 $\int_0^{+\infty} f(0,y)dy$ 都收敛，则当 $0<p<q$ 时，数列

$$u_n(p,q) = \sum_{i=np}^{nq}\sum_{j=np}^{nq} f(i,j) - \int_{np}^{nq}\int_{np}^{nq} f(x,y)dxdy$$

当 $n\to\infty$ 时收敛于零.

注意，极限 $\lim_{n\to\infty}\int_{np}^{nq}\int_{np}^{nq} f(x,y)dxdy$ 存在时，积分 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy$ 未必收敛. 但有

推论 4 若极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{np}^{nq}\int_{np}^{nq} f(x,y)dxdy = L\ ,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=np}^{nq}\sum_{j=np}^{nq} f(i,j) = L\ .$$

最后，若积分 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy$ 收敛，则由定理 2 可得下述二重级数的收敛判别法：

定理 3 若函数 f 在区域 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上具有性质(A)，则级数 $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} f(i,j)$ 收敛的充要条件是积分

$$I_1 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dxdy\ ,$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} f(x,0)dx\ ,\ I_3 = \int_0^{+\infty} f(0,y)dy$$

都收敛.

§5.11 中值公式及 Kantorovich 不等式的推广

5.11.1 向量值函数的中值不等式

下面，我们把一元函数的中值不等式(§2.7.2，定理2的推论1)推广到向量值函数的情形．为此，先引入下列概念．

定义1 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的子集 V 称为线性有限的，是指对每一 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，集 $V\cap[x,y]$是有限的，其中

$$[x,y]=[x_1,y_1]\times[x_2,y_2]\times\cdots\times[x_n,y_n].$$

定义2 设 $G\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，是 $f:G\to\mathbb{R}^m$ 向量值函数，$c\in G$. 称 f 在 c 处 Fréchet 可微(简称可微)，是指存在线性算子 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，使得

$$f(c+h)=f(c)+Lh+o(h),$$

这里 $\lim\limits_{\|h\|\to 0}\dfrac{o(h)}{\|h\|}=0$．线性算子 L 通常记作 $f'(c)$.

若令 $\|L\|=\max\limits_{\|x\|=1}\|Lx\|$，则容易证明，对任意 $x\in\mathbb{R}^n$，有

$$\|Lx\|\leqslant\|L\|\,\|x\|. \tag{1}$$

定义3 设 D 是$\mathbb{R}^n$中的一个球，称向量值函数 $f:D\to\mathbb{R}^m$ 在 D 的内点 x 处 Gateaux 可微，是指存在线性算子 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$，使得对任意 $h\in\mathbb{R}^n$，有

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+th)-f(x)}{t}=Lh.$$

可以证明，若 f 在 D 的内点 x_0 处 Fréchet 可微，则必在 x_0 处 Gateaux 可微，而逆命题并不成立．

设 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，$v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n$．我们用$\langle u,v\rangle$表示 u 与 v 的内积，即$\langle u,v\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i$，则有

Cauchy-Schwartz 不等式. 设 $u,v\in\mathbb{R}^n$，则

$$|\langle u,v\rangle|\leqslant\|u\|\,\|v\|. \tag{2}$$

定理 1（中值不等式） 设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中以 x_0 为心，以 r 为半径的球，即

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n\mid\|x-x_0\|\leqslant r\},$$

B 是 D 的内部．若向量值函数 $f:D\to\mathbb{R}^m$ 在 D 上连续，且除了 B 的线性有限子集 V 而外，f 在 $B\backslash V$ 上是 Fréchet 可微的，则对任意 $x,y\in D$，存在 $c\in(x,y)$，使得

$$\|f(y)-f(x)\|\leqslant\|f'(c)\|\,\|y-x\|. \tag{3}$$

证 取 $z\in\mathbb{R}^m$，并定义函数 $K:[0,1]\to\mathbb{R}$ 为

$$K(t)=\langle z,f((1-t)x+ty)\rangle.$$

易见，函数 K 满足 §2.7.2 中定理 2 的推论 1，故知存在 $t_0\in(0,1)$，使得

$$|K(1)-K(0)|\leqslant|K'(t_0)|.$$

由于

$$K(1)-K(0)=\langle z,f(y)-f(x)\rangle,$$

$$K'(t_0)=\langle z,f'(c)(y-x)\rangle,$$

其中 $c=(1-t_0)x+t_0y$，因而据不等式(2)、(1)，得到

$$|\langle z,f(y)-f(x)\rangle|\leqslant\|z\|\,\|f'(c)\|\,\|y-x\|. \tag{4}$$

若 $f(x)=f(y)$，则不等式(3)显然成立，故可设 $f(x)\neq f(y)$. 取

$$z=\frac{f(y)-f(x)}{\|f(y)-f(x)\|},$$

并代入(4)式，就得到

$$\|f(y)-f(x)\|\leqslant\|f'(c)\|\,\|y-x\|.$$

证毕．

上面的证明方法选自文献[124]. 该文还指出，定理 1 可以推广到 Gateaux 可微的情形，甚至可以推广到 Hilbert 空间及 Banach 空间的情形．

5.11.2 Kantorovich 不等式的推广

下面，我们把具有广泛应用的 Kantorovich 不等式推广到更

为普遍的形式——多元函数的积分不等式.

定理 2 设二元函数 f 在有界闭区域 D 上可积，且满足 $0<m\leqslant f(x,y)\leqslant M$ (m,M 是实数)，则对任意实数 μ，有不等式

$$\iint_D \frac{1}{f^\mu(x,y)}dxdy \iint_D f^\mu(x,y)dxdy \leqslant \frac{[(m^\mu+M^\mu)|D|]^2}{4(mM)^\mu},$$

式中 $|D|$ 表 D 的面积.

证 由已知条件知 f^μ 及 $1/f^\mu$ 在 D 上的二重积分都存在. 因对任意 $(x,y)\in D$，有 $0<m\leqslant f(x,y)\leqslant M$，故

$$\frac{(f^\mu(x,y)-m^\mu)(f^\mu(x,y)-M^\mu)}{f^\mu(x,y)}\leqslant 0,$$

即 $\dfrac{f^\mu(x,y)+(mM)^\mu}{f^\mu(x,y)}\leqslant m^\mu+M^\mu$，从而

$$\iint_D f^\mu(x,y)dxdy \leqslant (m^\mu+M^\mu)|D| - \iint_D \frac{(mM)^\mu}{f^\mu(x,y)}dxdy. \tag{5}$$

令 $\beta=(mM)^\mu\iint_D \dfrac{1}{f^\mu(x,y)}dxdy$，并用 β 遍乘(5)式两端，得

$$\beta\iint_D f^\mu(x,y)dxdy \leqslant (m^\mu+M^\mu)|D|\beta-\beta^2.$$

而 $(m^\mu+M^\mu)|D|\beta-\beta^2\leqslant[(m^\mu+M^\mu)|D|]^2/4$，故

$$\iint_D \frac{1}{f^\mu(x,y)}dxdy \iint_D f^\mu(x,y)dxdy \leqslant \frac{[(m^\mu+M^\mu)|D|]^2}{4(mM)^\mu}.$$

推论 1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积，且满足 $0<m\leqslant f(x)\leqslant M$ (m,M 是实数)，则对任意的实数 μ，有不等式

$$\int_a^b \frac{1}{f^\mu(x)}dx\int_a^b f^\mu(x)dx \leqslant \frac{[(m^\mu+M^\mu)(b-a)]^2}{4(mM)^\mu}.$$

证 令 $F(x,y)=f(x)$，$(x,y)\in[a,b]\times[0,1]$，则

$$\iint_D \frac{1}{F^{\mu}(x,y)}dxdy \iint_D F^{\mu}(x,y)dxdy$$
$$= \int_a^b \frac{1}{f^{\mu}(x)}dx \int_a^b f^{\mu}(x)dx .$$

由定理 2 并注意到 $|D|=b-a$，便知推论 1 成立.

在推论 1 中，置 $[a,b]=[0,1]$，$\mu=1$，便得 Kantorovich 不等式

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \int_0^1 f(x)dx \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM} .$$

推论 2 设 $a_i>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$，又 $0<\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} \leqslant \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} .$$

证 在闭区间 $[0,1]$ 上插入一组分点：

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1 ,$$

使 $x_i - x_{i-1} = a_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 在区间 $[0,1]$ 上定义函数

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1, & x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ \lambda_2, & x_1 < x \leqslant x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_n, & x_{n-1} < x \leqslant x_n, \end{cases}$$

则

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i ,$$

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{f(x)}dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} .$$

对任意 $x\in[0,1]$，显然有 $0<\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$，故由推论 2 知

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\lambda_i} = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$$
$$\leqslant \frac{(\lambda_1+\lambda_n)^2}{4\lambda_1\lambda_n} .$$

注 1 本小节的材料来源于文献[75].

参 考 文 献

[1] 丁传松、李秉彝，广义黎曼积分，科学出版社，1989.

[2] 丁勇，几种正项级数敛散性判别法的比较，数学通报，11(1988).

[3] 马文秀，关于无最小正周期的周期函数，数学的实践与认识，3(1988).

[4] 马尔迈，关于“正项级数收敛性的一个判别法”一文的注记，宁夏大学学报，4(1987).

[5] 马意海，再论积分第一中值定理的证明，曲阜师范学院学报，1(1982).

[6] 王凤山，丁敬民，关于连续函数严格单调的充分条件，河北师范大学学报，1(1986).

[7] 王济平，正项级数敛散性的比较定理和判别法，河北大学学报，1(1983).

[8] 王晓裴，黎曼可积函数序列的极限函数为黎曼可积的充要条件，上海师范学院学报，3(1983).

[9] 王继武、康泰，正项级数广义判别法，四川师范学院学报，1(1981).

[10] 刘一鸣，积分第一中值定理的一个简明证明，曲阜师范学院学报，3(1980).

[11] 刘士强，非一致连续的充分必要条件，宁夏大学学报，1(1987).

[12] 刘文，一类奇异单调函与二进小数的一个度量性质，科学通报，24(1979).

[13] 刘文，一类奇异单调函数，科学通报，24(1982).

[14] 刘秋生，正项级数判敛性的一个方法，数学通报，3(1964).

[15] 刘儒珍、李春禄和冯淑芬，函数一致连续的一个等价命题，天津师范大学学报，1(1989).

[16] 田长久，关于中值定理的几点注记，河北师范大学学报，2(1987).

[17] 田雨，关于《哥西中值定理的推广》，数学通报，3(1980).

[18] 田载今，周期函数的两种定义的差异，数学通报，1(1989).

[19] 田景黄，徐世龙，关于积分号下取极限，四川师范学院学报，2(1984).

[20] 冯平道，Rolle 定理的一个证明，宁夏大学学报，2(1987).

[21] 叶怀安，关于定积分定义的一点注记，数学通讯，9(1982).

[22] 毕义明，关于求导次序的可交换问题，数学通报，8(1985).

[23] 朱匀华，数 e 存在性的一个证明，数学通报，3(1984).

[24] 朱永庚，Rolle 定理的一个新证明，陕西师范大学学报，(1980—1981).

[25] 朱家麟，浅谈函数概念的历史演进，河北师范大学学报，4(1990).

[26] 闫光杰，“狄利克雷引理的推广”一文的改进，数学通报，4(1984).

[27] 闫革兴、战新山，关于含有 Dini 导数的函数中值定理，黑龙江大学学报，3

(1992).
[28] 苏子安，广义积分的根值判别法及其推广，数学通报，6(1989).
[29] 苏子安，复函数的微分中值公式，数学的实践与认识，4 (1992).
[30] 李文亮，函数在无穷正向上的一致连续性的判定，高等数学，2(1985).
[31] 李文亮，关于函数的一致可微性，高等数学，3(1987).
[32] 李文亮，关于拉格朗日定理与中间值的唯一性，数学通报，4(1992).
[33] 李文荣，关于中值定理"中间点"的渐近性，数学的实践与认识，2(1985).
[34] 李元中、冯汉桥，高阶哥西中值定理，高等数学，1(1987).
[35] 李启福，Fourier 级数收敛定理的一个新证明，四川师范学院学报，1(1986).
[36] 李佛奇，正项级数和广义积分敛散性判别法，宁夏大学学报，4(1987).
[37] 李思源，多元函数可微的一个注记，高等数学，1(1987).
[38] 李逊，中值定理的推广，华中师范大学学报，1(1986).
[39] 李铁烽，正项级数判敛的一种新的比值判别法，数学通报，1(1990).
[40] 李清煜，积分第一中值定理补注，华中师范学院学报，1(1982).
[41] 李继闵，周期函数之和、差、积、商的周期性，数学通报，5(1965).
[42] 李毅夫，关于中值定理"中间点"的渐近性的更一般的定理，高等数学，4(1987).
[43] 汪林，数学分析中的问题与反例，云南科技出版社，1990.
[44] 汪林，实分析中的反例，高等教育出版社，1989.
[45] 汪用征，关于二阶混合偏导数，高等数学，2(1987).
[46] 肖明，函数概念的演变，上海教育出版社，1979.
[47] 何逸民，关于泰勒公式的余项，河北师范大学学报，1(1986).
[48] 绍文，关于积分第一中值定理，曲阜师范学院学报，2(1979).
[49] 岳中亮、李录书和王启新，中值定理"中间点"的渐近性质及其应用，高等数学，3(1987).
[50] 金井平，凸函数定理的一个新证明，曲阜师范大学学报，1(1988).
[51] 张广梵，正确理解和运用第一积分中值定理，数学通报，7(1986).
[52] 张必华，$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n$ 的简捷证法，数学教育研究，4(1990).
[53] 张国才、方良秋，函数项级数亚一致收敛的判别法，海南师范学院学报，2(1991).
[54] 张映东，证明极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 存在两法，广州师范学院学报，1(1982).
[55] 张德春，也谈求导次序的可交换问题，数学通报，7(1988).
[56] 宗序平，关于 Dirichlet 和 Abel 判别法的必要性，数学的实践与认识，2(1990).
[57] 陈广卿，Γ 函数的特征，数学通报，7(1964).
[58] 陈迪荣，积分中值定理"中间点"的渐近性，鄂西大学学报，2(1986).
[59] 陈钊炳，一个弱微分中值定理及其若干应用，丽水师专学报，1(1987).

[60] 陈俊珍，Riemann 定理的反例，高等数学，4(1987).
[61] 周英，导数判别法的进一步探讨，高等数学，3(1987).
[62] 周家云、周松宽，两个判别法的等价性，曲阜师范学院学报，4(1983).
[63] 周祖遠，泰勒公式的另一证明，数学通报，11(1985).
[64] 周肇锡，对“正项级数判敛法的一个方法”一文的补充，数学通报，11(1964).
[65] 杨自豪、李淑媛，凸函数的等价定义，广西师范学院学报，2(1988).
[66] 杨翰深，重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 的简洁证明与 e 的估计式，数学的实践与认识，3(1990).
[67] 陆洪涛，周期函数有最小正周期的充要条件，西南师范大学学报，7(1985).
[68] 孟宪亭，哥西中值定理的推广，数学通报，3(1979).
[69] 罗敬辉，阿贝尔判别法的必要条件的探讨，数学通报，9(1984).
[70] 宣立新，对两个周期函数之和的周期性的一点看法，南京师范大学学报，2(1984).
[71] 是长春，关于周期函数的若干性质，高等数学，4(1987).
[72] 赵世超，关于用等价无限小量替换的方法求极限的一个推广，辽宁师范大学学报，3(1986).
[73] 赵明方，关于凸函数几个定义的等价性，四川师范学院学报，2(1982).
[74] 赵明方，多元连续函数最大值与最小值的极限形式，四川师范学院学报，3(1985).
[75] 赵明方，Kantorovich 不等式的推广，数学通报，1(1986).
[76] 赵显曾，关于正项级数 Cauchy 判别法的一个推广，数学的实践与认识，4(1983).
[77] 赵明方，Dirichlet 判别法的必要条件，数学通报，7(1983).
[78] 赵根榕、熊必璠，导数介值定理的几种证明，曲阜师范学院学报，2(1982).
[79] 胡雁军，关于数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 收敛性的证明，高等数学，1(1985).
[80] 郝一凡，也谈广义积分的判敛，数学通报，3(1991).
[81] 徐承璋，判别非正常积分敛散性的两种方法，重庆师专学报，3(1988).
[82] 梁宗巨，多元函数的最大值与最小值，数学通报，10(1965).
[83] 梁宗巨，世界数学家史简编，辽宁人民出版社，1981.
[84] 郭大钧，非线性泛函分析，山东科学技术出版社，1985.
[85] 殷建红，一致连续函数的充分必要判别法，宁夏大学学报，2(1987).
[86] 夏禹光，积分上限的函数 $\int_a^x f(t)dt$ 的一个应用，数学通报，3(1987).
[87] 袁朗轩，一致连续的等价定义及应用，阜阳师范学院学报，2(1987).
[88] 黄礼平，概率积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ 的一个新算法，数学通报，4(1986).

[89] 黄绍文,关于黎曼积分的定义,西南师范大学学报,3(1982).

[90] 谢民育,狄利克雷引理的推广,数学通报,4(1984).

[91] 曾祥富,关于定积分中值定理的一个注记,西南师范大学学报,4(1987).

[92] 彭守权,关于周期函数最小正周期的存在性,华中师范学院学报,1(1985).

[93] 蒋润荣,Gracc 定理的一个推广,高等数学,1(1986).

[94] 颜怀曾,周期函数的最小正周期,数学通报,6(1963).

[95] Колмогоров, A. H. ,Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout. Fund. Math. ,4(1923),324－328.

[96] Колмогоров, A. H. ,Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout. Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris),183(1926),1327－1328.

[97] Лузин, H. H. ,Über eine Potenzreihe. Rend. Cire. Matem. Palermo,32(1911),386－390.

[98] Стецкин, С. Б. , О сходимости и расходимости тригонометрицеских рядов. У МН. , VI,No2,(1951),148－149.

[99] Фихтенгольц, Г. М. ,微积分学教程,丁寿田等译,人民教育出版社,1962.

[100] Abian, A. , A ultimate proof of Rolle theorem, Amer. Math. Monthly, 86 (1979),484－485.

[101] Akerberg, B. , A proof of the arithmeticgeometric mean ineguality, Amer. Math. Monthly,70(1963),997－998.

[102] Aull, C. E. , The first symmetric derivative, Amer. Math. Monthly, 74(1967), 708－711.

[103] Bagleoy, R. W. , Mcknight, J. D. , Differentiation of infinite series of functions, Amer. Math. Monthly,66(1959),890－892.

[104] Barnes, C. W. , Euler constant and e, Amer. Math. Monthly, 91(1984), 428－430.

[105] Barrett, C. , A modified Maclaurin integral test, Amer. Math. Monthly, 71 (1964),190－193.

[106] Bernau, S. J. , The bounds of a continuous function, Amer. Math. Monthly, 74 (1967),1082.

[107] Borwein, D. , Meir, A. , Divergence criteria for positive series, Amer. Math. Monthly,79(1972),1104－1106.

[108] Botsko, M. W. , A unified trestment of various theorems in elementary analysis, Amer. Math. Monthly, 94(1987), 450－452.

[109] Botsko, M. W. , Gosser, R. A. , Stronger versions of the fundamental theorem of calculus, Amer. Math. Monthly, 93(1986), 294－295.

[110] Carleson, L., On convergence and growth of partialsums of Fourier series, Acta. Math., 116(1966), 135—157.

[111] Carter, D. S., L'Hospital's rule for complex-valued functions, Amer. Math. Monthly, 65(1958), 264—266.

[112] Chu, S., Moyer, R. D., On continuous and fixed points, Fund. Math., 59 (1966), 91—95.

[113] Clarke, F. H., Optimization and Nonsmooth Analysis, Wiley-Interscience, 1983.

[114] Cohen, H., Archiv der Mathematik, 15(1964), 316—317.

[115] Darst, R. B., Simple proof of two estimates for e, Amer. Math. Monthly, 80 (1973), 194.

[116] Diananda, P. H., A simple proof the arithmetic mean, geometric mean. Amer. Math. Monthly, 67(1960), 1007.

[117] Eggermont, P. P. B., Noncentral difference quotients and the derivative, Amer. Math. Monthly, 95(1988), 551—553.

[118] Elyash, E. S., Laush, G. L. & Levine, N., On the product of two uniformly continuous functions on the line, Amer. Math. Monthly, 67(1960), 265—267.

[119] Fatou, P., Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta. Math., 30 (1906), 335—400.

[120] Fèjer, L., Sur les singularitiés de la séries de Fourier des fonctions continues, Ann. Sci. Ec., Normale sup, 28(1911), 63—103.

[121] Firey, W. J., Line integrals of exact differentials, Amer. Math. Monthly, 68 (1961), 57—59.

[122] Fort, M. K., The maximum value of a continuous function, Amer. Math. Monthly, 58(1951), 32—33.

[123] Fart, M. K., A theorem concerning functions discontinuous on a dense set, Amer. Math. Monthly, 58(1951), 408—410.

[124] Furi, M., Martelli, M., On the mean value theorem, inequality, and inclusion, Amer. Math. Monthly, 98(1991), 840—846.

[125] Gerald, F., Increasing continuous singular functions, Amer. Math. Monthly, 80 (1973); 918—919.

[126] Goodner, D. B., Extensions of the law of the mean, Amer. Math. Monthly, 64 (1957), 185—186.

[127] Hallenbeck, D. J., Tkaczyńska, K., The absolute and uniform convergence infinite improper integrals, Amer. Math. Monthly, 95(1988), 124—126.

[128] Haruki, H., Haruki, S., Euler's integrals, Amer. Math. Monthly, 90(1983),

464—466.

[129] Henle, J. M., Tangent planes with infintesimals, Amer. Math. Monthly, 91 (1984), 433.

[130] Herzog, F., Piranian, G., Sets of convergence of Taylor series, I. Duke. Math. Journ, 16(1949), 529—534.

[131] Hillam, B. P., A characterization of the convergence of successive approximations, Amer. Math. Monthly, 83(1976), 273.

[132] Hummel, P. H., Seebeck, Jr, C. L., A generallzation of Taylor's expansion, Amer. Math. Monthly, 56(1949), 243—247.

[133] Hunt, R. A., Proc. Conf. Edwardr, ILL, (1967), 235—255.

[134] Jacobson, B., On the mean value theorem for integrals, Amer. Math. Monthly, 89(1982), 300—301.

[135] Johnsonbauge, R. F., Another proof of an estimate for e, Amer. Math. Monthly, 81(1974), 1011—1012.

[136] Kametani, S., A new formulation of mean value theorem, Nat. Sci. Rep., Ochanomizu University, 1(1951), 1—5.

[137] Karamata, J., Sur la formule des accroissements finis, Srpaua Akad Nauka zb Rad, 7(1951), 119—124.

[138] Katznelson, Y., Stromberg, K., Everywhere differentiable nowhere monotone functions, Amer. Math. Monthly, 81(1974), 349—354.

[139] Klamkin, M. S., Alpha-max, Beta-min, and a limit for e, Amer. Math. Monthly, 81(1974), 291—292.

[140] Klein, M., 古今数学思想, 上海科技出版社, 1979.

[141] Klopfenstein, K. F., Telste, J., Visualizing uniform continuity of functions of several variables, Amer. Math. Monthly, 81(1974), 623—625.

[142] Knight, W. J., Functions with zero rigth derivatives are constant, Amer. Math. Monthly, 87(1980), 657—658.

[143] Kong-Ming Chong, An inductive proof of the A. M-G. M. inequality, Amer. Math. Monthly, 83(1976), 369.

[144] Lakshminarasimhan, T. V., On extensions of Taylor's formula, Amer. Math. Monthly, 72(1965), 877—881.

[145] Levine, N., Unifromly continuous linear sets, Amer. Math. Monthly, 62 (1955), 579—580.

[146] Lipiński, J., On zeros of a continuous nowhere differentiable function, Amer. Math. Monthly, 73(1966), 166—168.

[147] Luxemburg, W. A. G., Arzelà's dominated convergence theorem for the Rie-

mann integral, Amer. Math. Monthly,78(1971),970—979.

[148] Marchis,F., On a continuous non-diffentiable function, An Univ Timisoara ser sti Mat-Fiz,(1963),181—190.

[149] Meyserson,M. D. ,Every power series is a Taylor series, Amer. Math. Monthly,88(1981),51—52.

[150] Michelow,J., A note On two convergence tests, Amer. Math. Monthly,67 (1960),581—583.

[151] Moran,D. A., For a collection of examples and counterexamples, Amer. Math. Monthly, 68(1961),508—509.

[152] Mott, T. E., On the quotient of monotone functions, Amer. Math. Monthly, 70(1963),195—196.

[153] Mukhopadhyay,S. N., On schwarz differentiability, Amer. Math. Monthly,74 (1967),542—544.

[154] Neculce,N., The "Weakening" of Cauchy's convergence criterion, Amer. Math. Monthly,68(1981),880—885.

[155] Norris,M. J., Some necessary conditions for convergence of infinite series and improper integrals, Amer. Math. Monthly,60(1953),96—97.

[156] Owens,P. J., Absolutely cauchy products, Amer. Math. Monthly,75(1968), 687.

[157] Paine,D., Visualizing uniform continuity, Amer. Math. Monthly,75(1968), 44—45.

[158] Pamankutty,P., Vamanamurthy,M., Limit of the composite of two function, Amer. Math. Monthly,82(1975),63—64.

[159] Pennington,W. B., Existence of a maxmum of a continuous function, Amer. Math. Monthly,67(1960),892—893.

[160] Porter,G. J., On the differentiability of a certain well-known function, Amer. Math. Monthly,69(1962),142.

[161] Posey,E. E., Vaugnan,J. E., Functions with a proper local maximum in each interval, Amer. Math. Monthly,90(1983),281—282.

[162] Post,K. A., A combinatorial lemma involving a divergence criterion for series of positive terms, Amer. Math. Monthly,77(1970),1085—1087.

[163] Pringsneim, A., Encyclopadie der Math. ,Wissensch I A,22.

[164] Rajagopal,C. T., On some generalizations of Cauchy's condensation and integral tests, Amer. Math. Monthly,46(1939),338—341.

[165] Rajagopal,C. T., On the remainder in Taylor's theorem, Math. Student,14 (1946),71—73.

[166] Redheffer, R., Walter, W., The subgradient in R^n, Nonlinear Analysis, 20 (11), 1345—1348(1993).

[167] Rockafellar, R. T., Convex analysis, princeton Univ. Press, 1970.

[168] Rüthing, D., Some definitions of the concept of function from Joh Bernoulli to N. Bourbaki, The Mathematical Intelligencer, 6, 4(1984), 72—77.

[169] Samelson, H., On Rolle's theorem, Amer. Math. Monthly, 86(1979), 486.

[170] Satyanarayana, U. V., A note on Riemann-Stieltjes integrals, Amer. Math. Monthly, 87(1980), 477—478.

[171] Schubert, S. Roy., On a function of van der waerden, Amer. Math. Monthly, 70(1963), 402.

[172] Schwarz, H. A., Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Vol2, Springer, 1890, 309.

[173] Smart, D. R., When does $T^{n+1}x-T^nx>0$ imply convergence? Amer. Math. Monthly, 87(1980), 748—749.

[174] Smith, A., Convergence-preserving: An alternative discussion, Amer. Math. Monthly, 98(1991), 831—833.

[175] Spiegel, M. R., Remarks concerning the probability integral, Amer. Math. Monthly, 63(1956), 35—37.

[176] Steinhaus, M., Une série trigonométrique partout divergente, Compt. Rend. Soc. Sci., 1912, 219—229.

[177] Tricomi, F. G., On the theorem of Frullani, Amer. Math. Monthly, 58(1951), 158—164.

[178] Vučkovič, V., Quelques extensions des théorèmes de moyenne, Srpaka Akad Nauka, zb Rad, 18(1952), 159—166.

[179] Výbovný, R., Differentiation of power series, Amer. Math. Monthly, 84 (1987), 369—370.

[180] Ward, M., A generalized integral test for convergence of series, Amer. Math. Monthly, 56(1949), 170—172.

[181] Weckesser, V., The subdifferential in Banach spaces, Nonlinear Analysis, 11, 20(1993), 1349—1354.

[182] Weinstock, R., On continuous differentiability, Amer. Math. Monthly, 64 (1957), 492.

[183] White, B., One-one continuous mapping $R\to R$, Amer. Math. Monthly, 83 (1976), 206.

[184] Wilansky, A., Topology for analysis, 1970.

[185] Wildenberg, G., Convergence-preserving functions, Amer. Math. Monthly, 95

(1988),542－544.

[186] Zeller,K.,Über Konvergenzmengen von Fourierreihen, Archiv der Math., 6 (1955),335－340.

[187] Klambauer,G.,数学分析,上海科技出版社,1985.

[188] Volterra,V., Giornale de Battaglin,1981.

[189] Drobot,V., Horayne,M., Continuous functions with a dense set of proper local maxima, Amer. Math. Monthly,92(1985),209－211.

[190] 汪林,泛函分析中的反例,高等教育出版社,1994.

责任编辑：吕　虹
封面设计：张　放

ISBN 7-03-004755-9
O·808

定　　价：22.00 元
科技新书目：368-213